Problème de Cauchy global régulier pour quelques équations d'évolution semi-linéaires.

Hasna Ben Hadj Youssef

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par

Hasna BEN HADJ YOUSSEF

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet :

PROBLÈME DE CAUCHY GLOBAL RÉGULIER POUR QUELQUES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION SEMI-LINÉAIRES

Soutenue le 30 octobre 2006 devant le jury composé de

M. PIERO D'ANCONA	**Rapporteur**
M. DANIEL GOURDIN	**Directeur de thèse**
M. SATYANAD KICHENASSAMY	**Rapporteur**
M. SAMI MUSTAPHA	**Examinateur**
M. JEAN VAILLANT	**Président du jury**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Daniel Gourdin, qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et qui a dirigé ce travail.
Ses qualités mathématiques, ses conseils judicieux ainsi que sa grande compréhension m'ont constamment soutenu.

Je remercie Messieurs Satyanad Kichenassamy et Piero D'Ancona pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, pour leurs remarques enrichissantes et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail. Ils me font un grand honneur de participer au jury.
Mes remerciments vont également à Messieurs Jean Vaillant et Sami Mustapha qui ont accepté de faire partie de ce jury.

J'adresse aussi des remerciments à mes amis : Ourida, Aicha et Seif qui m'ont soutenu et supporté durant la préparation de cette thèse.

Un grand merci tout particulièrement à ma soeur Radhia et toute sa famille, mon mari et mes beaux parents pour leurs soutien inestimable et leur aide pendant toutes ces années de thèse, je leur en suis trés reconnaissante.

Enfin, je dédie cette thèse à mon père, ma mère et mes deux filles Myriam et Sarah.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que l'on ne peut pas en général obtenir de solutions globales régulières pour les équations d'évolution hyperboliques, paraboliques, de Schrödinger et d'autre types lorsque l'équation est non-lineaire même si les données sont régulières et petites.La solution locale, quand elle existe, peut développer des singularités en temps fini.
Lorsque les données sont petites en norme Sobolev, avec une condition de décroissance à l'infini dans la direction d'évolution (c.à.d le temps) pour la partie linéarisée du problème, on peut obtenir des solutions globales lorsque la dimension d'espace est grande dans le cas quasi-linéaire.
A l'inverse lorsque les données sont grandes dans le cas semi-linéaire, on peut obtenir des résultats positifs lorsque la dimension d'espace est petite.
Dans cet esprit la thèse est divisée en deux chapitres pour faire cette distinction.

Premier chapitre

Ce chapitre étudie les solutions régulières globales d'une équation particulière semi-linéaire faiblement hyperbolique avec caractéristiques de multiplicité constante deux.Les linéarisés de cette équation vérifient une hypothèse du type de Levi.
Il s'agit du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \Box^2 u = f(u, \Box u) \\ (u, u_t, u_{tt}, u_{ttt})/_{t=0} = (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{cases} \tag{0.1}$$

dans l'espace $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ où $\Box = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ est le d'Alembertien dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

La présence de $\Box u$ comme deuxième variable de f permet de transformer le problème en un système d'équations d'onde non linéaires. Nous avons obtenu des résultats globaux dans les espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ pour n quelconque et dans $\mathcal{C}^\infty$ lorsque la dimension du domaine spatial est 1 ou 2.

La preuve est basée sur une méthode introduite par M.Shatah et M.Struwe([27]). La difficulté est qu'il n'y a aucune conservation d'énergie, du fait de la faible hyperbolicité. Par conséquent nous avons supposé que la fonction f et toutes ses dérivées sont bornées.
Ce type de problème a été examiné par plusieurs auteurs.
• En 1961 Jörgens a étudié la régularité de la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \Box u = f(u)\ ,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{0.2}$$

• En 1981 P.Brenner et W.Von Wahl ([5]) ont montré que le problème de Cauchy (0.2) admet une solution globale $\mathcal{C}^\infty$ pour des données $\mathcal{C}^\infty$ et $n \leqslant 9$ si on a les deux conditions suivantes :
1) La condition de coercivité :

$$-F(u) := -\int_0^u f(v)dv \geq -c \mid u \mid^2 .$$

2) La condition de croissance :

$$\mid f' \mid \leq c(1+ \mid u \mid^{p-1}), 1 < p < 2^* - 1.$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$, où $2^* = \frac{2n}{n-2}$ et $n \geq 3$.
• En 1999 S.Panizzi ([25]) a étudié le cas critique $p = 2^* - 1$. Il a aussi montré que si $3 \leq n \leq 7$ et les conditions initiales sont régulières et petites dans la norme d'énèrgie, alors la solution existe en plus elle reste régulière quand les conditions initiales le permettent.
Il existe peu de résultats d'existence globale dans $\mathcal{C}^\infty$pour les équations faiblement hyperboliques non linéaire. Ces résultats sont obtenus pour le problème de Cauchy de l'équation semi-linéaire

$$u_{tt} - a(t)\triangle u = f(u),$$

où $a = a(t)$ une fonction analytique réelle non négative et $f = f(u)$ une fonction lisse qui satisfait des hypothèses supplémentaires appropriées.

l'originalité de ce premier chapitre est l'hypothèse d'hyperbolicité faible et de non-linéarité de notre problème.

Deuxième chapitre

Dans ce travail, nous prolongeons la théorie de John-Klainerman sur la recherche de solutions globales régulières pour l'équation des ondes non-linéaires

$$\Box y = \partial_{tt}^2 y - \Delta_x y = f(Dy, \nabla_x Dy) \tag{0.3}$$

à des opérateurs singuliers, remplaçant l'opérateur des ondes $\Box$, de la forme $L = \partial_{tt}^2 - p(t, \nabla_x)$ où $\nabla_x = (\partial_1, ..., \partial_n) = grad_x$,
$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $D = (\partial_t, \partial_1, ..., \partial_n) = grad_{t,x}, t \in \mathbb{R}$
en prenant

$$p(t, \nabla_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ix\xi}\ p(t,\xi)\hat{y}(t,\xi)\ d\xi,$$

avec $p(t, \xi)$ singulier (cf p 42,43 et 54).
La résolution du problème de Cauchy par superposition d'ondes planes pour

$$\begin{cases} \Box y = 0 \\ y(t=0) = 0\ ,\ y_t'(t=0) = g \end{cases} \tag{0.4}$$

permet d'obtenir des propriétés classiques de décroissance lorsque $t \to +\infty$ de Dy dans les normes $L^p - L^q$, essentielles pour développer la théorie de John-Klainerman, obtenues grâce à la représentation intégrale particulière de y .
Lorsque $n \geq 3$ la représentation de la solution y de (0.4) sous forme intégrale est

$$y(t,x) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{n-3}{2}} r Q(r,x)\ \ dr, \tag{0.5}$$

avec

$$Q(r,x) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} g(x + rz) dz. \tag{0.6}$$

Nous avons donc penser à chercher pour quel opérateur $p(t, \nabla_x)$ la solution y du problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 y - p(\nabla_x) y = 0 \\ y(t=0) = 0\ \ ,\ y_t'(t=0) = g \end{cases} \tag{0.7}$$

pouvait être égale à :

$$y(t,x) = \frac{t}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} g(x + tz) dz, \tag{0.8}$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, w_n étant l'aire de la sphère $S^{n-1}(0,1)$.
Ce chapitre est à rapprocher aussi de l'article " Non strictly Hyperbolic Non linear Systems" ([8]) où Walter Craig étudie des systèmes $N \times N$ du second ordre faisant intervenir des opérateurs pseudo-differentiels composés avec une fonction non-linéaire ainsi qu'un exemple illustratif préliminaire

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u + F(bu, au, c\partial_t u, t, x) = 0 \\ u(0,x) = f(x), \quad \partial_t u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{0.9}$$

où $b(t,x,\partial_t,D_x)$ est un opérateur différentiel du second ordre et $a(t,x,D_x)$, $c(t,x,D_x)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $0 \leq d < 2$ avec des conditions suplémentaires assurant l'hyperbolicité non stricte.
Les résultats de W.Craig sont locaux en temps et il évoque en exemple des problèmes de la mécanique des Milieux continues.
Ici nous donnons des exemples d'opérateurs d'évolution notés

$$L = \partial_{tt}^2 - p(t, D_x),$$

faisant intervenir des opérateurs singuliers p pour lesquels une perturbation quasi-linéaire donne des équations admettant des solutions régulières et globales :

$$\partial_{tt}^2 y - p(t, D_x) y = f(Dy) \tag{0.10}$$

Nos opérateurs semi-linéaires ne sont pas hyperboliques mais inspirés de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux dans la présentation suivante :

- Equation d'Euler-Poisson-Darboux ([24]) compareé à notre équation :
Il s'agit de l'équation :

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = \triangle_x I(x,t)$$

Elle a pour propriété d'avoir pour solution la moyenne sphérique de toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par l'expression

$$I(x,t) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}(0,1)} f(x + t\xi) dw_\xi \tag{0.11}$$

pour tout $t \geq 0$, ou même de toute fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. D étant un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ pour tout x de D ayant une distance à la frontière de D supérieure strictement à t.

On peut remarquer que :

$$I(x,0) = f(x) \tag{0.12}$$

Pour démontrer cette propriété F.John utilise le calcul symbolique suivant :
Considérons $I(x,t)$ comme l'image de $f(x)$ par une application T_t :

$$I(x,t) = T_t[f(x)]$$

Si on prend $f(x) = e^{i\eta.x}$ (η *vecteur de* $\mathbb{R}^n$) , on trouve :

$$I(x,t) = T_t(e^{i\eta.x}) = P_\nu(t \mid \eta \mid)e^{i\eta.x} \tag{0.13}$$

où $\nu = \frac{n-2}{2}$ et P_ν est une fonction de Bessel normaliseé par l'expression

$$P_\nu(s) = 2^\nu\ \Gamma(\nu+1)\ s^{-\nu}\ J_\nu(s) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-p^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{isp}dp \tag{0.14}$$

Pour les valeurs de n en question, 2ν est un entier non négatif et $P_\nu(s)$ est une fonction entière paire de s avec $P_\nu(0) = 1$
En remarquant que pour le Laplacien $\triangle_x$ on a

$$(it)^2\triangle_x[e^{i\eta.x}] = (t \mid \eta \mid)^2 e^{i\eta.x}$$

on peut écrire (0.10) sous la forme :

$$T_t(e^{i\eta.x}) = P_\nu(it\sqrt{\triangle})e^{i\eta.x} \tag{0.15}$$

Ici $P_\nu(it\sqrt{\triangle})e^{i\eta.x}$ est le developpement d'une série de puissance s de $\triangle$, chacune opère sur $e^{i\eta.x}$ séparement.
(0.15) suggère l'équation formelle

$$T_t = P_{\frac{n-2}{2}}(it\sqrt{\triangle}) \tag{0.16}$$

A l'aide de (0.16) nous avons l'équation formelle

$$I(x,t) = T_t[f(x)] = P_\nu(it\sqrt{\triangle})f(x) \tag{0.17}$$

Ici la fonction

$$P_\nu(s) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)s^{-\nu}J_\nu(s) \quad (\nu = \frac{n-2}{2}) \tag{0.18}$$

est solution de l'équation différentielle

$$P_\nu^{''}(s) + \frac{2\ \nu+1}{s} P_\nu^{'}(s) + P_\nu(s) = 0 \tag{0.19}$$

qui résulte de l'équation différentielle de Bessel

$$J_\nu^{''}(s) + \frac{1}{s}\ J_\nu^{'}(s) + (1 - \frac{\nu^2}{s^2}) J_\nu(s) = 0 \tag{0.20}$$

Cela suggère l'équation aux dérivées partielles

$$[\frac{2t+1}{t}\ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle] P_\nu(it\sqrt{\triangle}) = 0 \tag{0.21}$$

et induit que $I(x,t)$ est solution de l'équation d'Euler-Poisson-Darboux

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \triangle_x I(x,t) \tag{0.22}$$

La preuve directe que l'équation précédente a pour moyenne sphérique $I(x,t)$ est facile a obtenir :
On a par définition de $I(x,t)$

$$w_n \int_0^t \lambda^{n-1} I(x,\lambda) d\lambda = \int_{|y|\le t} f(x+y) dy \tag{0.23}$$

et en appliquant $\triangle$ à chaque membre, on a

$$\begin{aligned}
w_n \int_0^t \lambda^{n-1} \triangle_x I(x,\lambda) d\lambda &= \int_{|y|\le t} \triangle_x f(x+y) dy \\
&= \frac{1}{t} \int_{|y|=t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+y) y_i\ dS \\
&= t^{n-1} \int_{S(0,\eta)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+t\eta)\eta_i\ dw_\eta \\
&= t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S(0,\eta)} f(x+t\eta)\ dw_\eta = w_n t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} I(x,t)
\end{aligned}$$

En différentiant par rapport à t les premier et dernier membre, on obtient :

$$w_n t^{n-1} \triangle I(x,t) = w_n \left[(n-1) t^{n-2} \frac{\partial}{\partial t} I(x,t) + t^{n-1} \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} \right] \tag{0.24}$$

D'où l'équation d'Euler-Poisson-Darboux :

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} I(x,t) = \triangle_x I(x,t).$$

Signalons que J.Leray et S.Delache ([12]) ont étudié la solution fondamentale de cette équation et d'une équation généralisée mettant en évidence les propriétés de lacune de la théorie de Gårding.(cf aussi [3])
Dans cette thèse au lieu de $I(x,t)$, nous considérons

$$I^{'}(x,t) = tI(x,t) = \frac{t}{w_n}\int_{S^{n-1}(0,1)} f(x+t\xi)dw_\xi \tag{0.25}$$

et nous cherchons une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I^{'} - N(t, D_x).I^{'} = \triangle_x I^{'} \tag{0.26}$$

dont la solution est $I^{'}$ satisfaisant les donneés de Cauchy
$I^{'}(x,0) = 0, \frac{\partial}{\partial t} I^{'}(x,0) = f(x)$.
Pour calculer N nous utilisons des fonctions $\sigma(t,\xi)$ attachés à des opérateurs singuliers ; la fonction $\sigma(t,\xi)$ trouvée est méromorphe en ξ.
Nous utilisons des valeurs principales pour exprimer l'opérateur N correspondant puis nous calculons une deuxième représentation de N sous forme $Nu = T(Qu)$ où T est une fonction linéaire et Q un opérateur pseudo-différentiel en x.
Ensuite nous étudions des solutions globales régulières du problème de Cauchy correspondant à l'opérateur semi linéaire :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y - \triangle y - N(t, D_x)y = f(D_x y) \tag{0.27}$$

où f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ s'annulant au point 0.
Nous signalons que les opérateurs (0.11) et (0.25) satisfont à la propriété de Huygens que P.Günther ([21]) a étudié pour construire une classification des opérateurs satisfaisant cette propriété.

Chapitre 1

Solutions régulières globales d'équations aux dérivées partielles non linéaires faiblement hyperboliques

1.1 Introduction - Hypothèses et Résultats

La théorie de Nash Moser a permis à certains auteurs d'articles d'étudier des problèmes de cauchy localement en temps pour des équations et systèmes faiblement hyperboliques non linéaires ([16],[17] ,[20],[15]) avec des hypothéses du type de Levi exprimées sur les opérateurs linéarisés associés. Le même type de problème a été aussi étudié par la suite avec des hypothèses plus faibles par M.Cicognani et L.Zanghirati ([7]) .

On étudie ici les solutions régulières globales d'une équation obtenue par une perturbation non linéaire de l'itéré de l'opérateur des ondes. Il s'agit du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Box^2 u = f(u, \Box u) \\ (u, u_t, u_{tt}, u_{ttt})/_{t=0} = (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{array} \right. \tag{1.1}$$

dans l'espace $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ où $\Box = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ est le d'Alembertien dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous obtenons les résultat suivants :

Théorème 1.1 *Lorsque df est bornée sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$) et $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{H}^3_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, le problème de cauchy (1.1) admet une solution unique u telle que*

$$D^2 u \in \mathcal{C}^0 \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n),$$

où $\mathcal{C}^0 \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$.

Théorème 1.2 *Pour $n = 1$ ou $n = 2$ et $d^k f$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2), \forall\ k = 1, \cdots \infty$) et $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in [\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)]^4$, le problème de Cauchy (1.1) admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.*

1.2 Transformation du problème (1.1) et solutions faibles du problème transformé

1.2.1 Transformation du problème et définitions

Le problème (1.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \Box u = v \\ \Box v = f(u, v) \\ (u, u_t)/_{t=0} = (u_0, u_1), (v, v_t)/_{t=0} = (v_0 = u_2 - \triangle u_0, v_1 = u_3 - \triangle u_1) \end{cases} \tag{1.2}$$

et (1.2) est un cas particulier de

$$\begin{cases} \Box u = f_1(u, v) \\ \Box v = f_2(u, v) \\ (u, u_t)/_{t=0} = (u_0, u_1), (v, v_t)/_{t=0} = (v_0, v_1) \end{cases} \tag{1.3}$$

qui, si on pose $w = (u, v), w_0 = (u_0, v_0), w_1 = (u_1, v_1)$ et $F(w) = (f_1(w), f_2(w))$, peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \Box w = F(w) \\ (w, w_t)/_{t=0} = (w_0, w_1). \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.1 *On note $\mathcal{C}^{0,k}$ la classe des fonctions F continues dont toutes les différentielles jusqu'à l'ordre k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) existent et sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.*

Remarque 1.1 *: Si $F \in \mathcal{C}^{0,1} = \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$, alors F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. C'est à dire ; il existe $c > 0$ tel que $\mid F(w) - F(w') \mid \leq c \mid w - w' \mid$. On peut prendre*

$$c = [F]_{C^{0,1}} = \sup_{w\in\mathbb{R}^2} \mid F'(w) \mid_{l(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)}$$

Définition 1.2 *On dira que $u_1 \in \mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $u_0 \in \mathbf{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) si $u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (respect. $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) et $\varphi u_1 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (respect. $\varphi u_0 \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

1.2.2 Solutions faibles du problème 1.4

Nous avons la proposition suivante

Proposition 1.1 *Si $F \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ et $(w_0, w_1) \in (\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n))^2 \times (\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))^2$, alors le problème de Cauchy (1.4) admet une solution unique globale w vérifiant $\mathrm{D}w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.*

Preuve de la proposition 1.1. La preuve se fait en plusieurs étapes.

<u>**Première étape**</u> : le problème linéaire global.

Lemme 1.1 *([32]) Soient u_0 et u_1 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il existe alors une unique solution du problème de cauchy*

$$\begin{cases} \Box u = 0 \\ u(t=0) = u_0, u_t(t=0) = u_1 \end{cases}$$

De classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$.

Preuve. En prenant la transformation de Fourier relativement à x on obtient une équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\widehat{u}}{dt^2} + \mid \xi \mid^2 \hat{u} = 0 \\ \\ \widehat{u}(t=0) = \widehat{u}_0, \widehat{u}_t(t=0) = \widehat{u}_1 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation est de la forme

$$\widehat{u}(t,\xi) = c_2(\xi) \sin t \mid \xi \mid + c_1(\xi) \cos t \mid \xi \mid$$

que l'on peut écrire

$$\widehat{u}(t,\xi) = c_0(\xi) \mid \xi \mid^{-1} \sin t \mid \xi \mid + c_1(\xi) \cos t \mid \xi \mid .$$

Puisque le membre de droite est défini pour c_0 et c_1 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, les conditions initiales impliquent que $c_1 = \widehat{u}_0$ et $c_0 = \widehat{u}_1$. Si u_0 et u_1 sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il est clair que cela donne une unique solution u dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. Si $u_0 = 0$ et $u_1 = \delta$, la solution u donné par $\widehat{u}$ prècédemment est appeleé solution fondamentale ou fonction de Riemann. C'est une distribution caractèriseé par $\widehat{\mathrm{R}}(t,\xi) = (2\Pi)^{-\frac{n}{2}} \mid \xi \mid^{-1} \sin t \mid \xi \mid$.
L'expression de R est donnée par ([32]).

Lemme 1.2 *([32]) On a*

$$\mathrm{R}(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2} \Pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2}) Im(\mid x \mid^2 - (t - i\epsilon)^2)^{(-\frac{n-1}{2})}$$

avec $\mathrm{R}(t,x) = 0$ *si* $\mid x \mid > t$, $supp \mathrm{R}(t,x) \subset \{\mid x \mid \leq t\}$.
Si $n \geq 3$ *est impair alors*

$$\mathrm{R}(t,x) = 0 \quad si \quad \mid x \mid < t,$$

d'où, $supp \mathrm{R}(t,x) \subset \{\mid x \mid = t\}$.
Et si $n = 3$ *:*

$$\mathrm{R}(t,x) = (4\Pi t)^{-1} \delta(\mid x \mid - \mid t \mid).$$

Finalement pour $n = 2$:

$$\mathrm{R}(t,x) = c_2^1 \; (t^2 - \mid x \mid^2)^{-\frac{1}{2}} sgnt \quad pour \mid x \mid < \mid t \mid .$$

et

$$\mathrm{R}(t,x) = 0 \; pour \; \mid x \mid > t.$$

Lemme 1.3 *L'équation*

$$\begin{cases} \Box u = h \\ u/_{t=0} = u_0, u_t/_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{1.5}$$

avec $u_0, u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, *admet pour solution*

$$u = \mathrm{R}(t,.) * u_1 + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}(t,.) * u_0 + \int_0^t \mathrm{R}(t-s,.) * h(s) \; ds.$$

Preuve. En effet c'est une formulation du principe de Duhamel

$$\partial_t u = (\partial_{tt}\mathrm{R}) * u_0 + (\partial_t \mathrm{R}) * u_1 + \mathrm{R}(0) * h(t) + \int_0^t \mathrm{R}_t(t-s) * h(s)ds$$

$$\partial_{tt} u = (\partial_{ttt}\mathrm{R}) * u_0 + (\partial_{tt} \mathrm{R}) * u_1 + \mathrm{R}_t(0) * h(t) + \int_0^t \mathrm{R}_{tt}(t-s) * h(s)ds$$

$$\triangle u = (\partial_t \triangle \mathrm{R}) * u_0 + (\triangle \mathrm{R}) * u_1 + \int_0^t \triangle \mathrm{R}(t-s) * h(s)ds$$

$$\begin{aligned}(\partial_{tt} - \triangle)\mathrm{R} = [\partial_t(\partial_{tt} - \triangle)\mathrm{R}] * u_0 + [(\partial_{tt} - \triangle)\mathrm{R}] * u_1 \\ + \int_0^t (\partial_{tt} - \triangle)\mathrm{R}(t-s) * h(s)ds + h(t).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\Box u = h$$

et

$$\begin{aligned} u(0,x) &= (\partial_t \mathrm{R})(0) * u_0 + \mathrm{R}(0) * u_1 + \int_0^0 \mathrm{R}(t-s) * h(s)ds \\ &= u_0 (\partial_t u)(0,x) \\ &= \triangle \mathrm{R}(0) * u_0 + (\partial_t \mathrm{R})(0) * u_1 \\ &= u_1. \end{aligned}$$

Lemme 1.4 *Si* $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)), \nabla u_0$ *et* u_1 *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$*, alors la solution* u *du lemme précédent est telle que* u *et* $Du \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))$ *et* Du *vérifie*

$$\mid \mathrm{D}u \mid_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} (t) \leq \mid \mathrm{D}u(0) \mid_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \mid h(s) \mid_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} ds \qquad (1.6)$$

où $\mathrm{D}u = (\partial_t u, \nabla_x u) = (\partial_t u, \partial_{x_1} u, \cdots, \partial_{x_n} u)$.

Preuve. On a

$$\widehat{u} = \partial_t \widehat{\mathrm{R}} \widehat{u}_0 + \widehat{\mathrm{R}} \widehat{u}_1 + \int_0^t \widehat{\mathrm{R}}(t-s) \widehat{h}(s) ds.$$

On approche alors h par des éléments h^p de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$, u_0 par $u_0^p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et u_1 par u_1^p dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque

$$\hat{\mathrm{R}}(t,\xi) = (2\Pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\sin t \mid \xi \mid}{\mid \xi \mid} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi))$$

et

$$\| \mathrm{R}(\hat{t,\xi})\hat{v}(\xi) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} \leq \frac{\mid t \mid}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}} \| \hat{v}(\xi) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)},$$

alors, d'après le théorème de Plancherel on a

$$\| \widehat{\mathrm{R}}(t,\xi) *_x \widehat{v}(\xi) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} \leq \frac{\mid t \mid}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}} \| v(x) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \| u^p - u^q \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} \leq \frac{\mid t \mid}{(2\Pi)^{n/2}} \| u_1^p - u_1^q \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} + \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}} \| u_0^p - u_0^q \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} \\ + \int_0^t \frac{\mid t-s \mid}{(2\Pi)^{n/2}} \| h^p - h^q \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_x)} (s) ds. \end{aligned}$$

avec $u^p = \mathrm{R}(t,.) \star u_1^p + (\partial_t \mathrm{R}) \star u_0^p + \int_0^t \mathrm{R}(t-s,.) \star h^p(s)ds$,
et ce d'après le lemme 1.3.

On refait le même calcul avec $\| \mathrm{D}u^p - \mathrm{D}u^q \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$, et on en déduit que la limite $u = \lim_{p\to\infty} u^p$ est solution du problème et se trouve dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n))$.
D'autre part,

$$\widehat{u}(t,\xi) = \cos \mid \xi \mid t \ \widehat{u}_0(\xi) \ + \frac{\sin \mid \xi \mid t}{\mid \xi \mid}\hat{u}_1(\xi) \ - \int\limits_0^t \frac{\sin \mid \xi \mid (t-\tau)}{\mid \xi \mid}\widehat{h}(\tau)d\tau,$$

d'où,

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = - \mid \xi \mid \sin \mid \xi \mid t\widehat{u}_0(\xi) + \cos \mid \xi \mid t\widehat{u}_0(\xi) - \int_0^t \cos \mid \xi \mid (t-\tau)\hat{h}(\tau)d\tau,$$

et

$$\mid \xi \mid \hat{u}(t,\xi) = \mid \xi \mid \cos \mid \xi \mid t \ \hat{u}_0(\xi) + \sin \mid \xi \mid t \ \hat{u}_1(\xi) - \int_0^t \sin \mid \xi \mid (t-\tau)\hat{h}(\tau)d\tau.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} \mid \xi \mid \widehat{u} \\ \partial_t \widehat{u} \end{pmatrix} \right. \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mid \xi \mid t & \sin \mid \xi \mid t \\ -\sin \mid \xi \mid t & \cos \mid \xi \mid t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mid \xi \mid \widehat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_1(\xi) \end{pmatrix} \\ &\qquad - \int_0^t \begin{pmatrix} \sin \xi (t-\tau) \\ \cos \mid \xi \mid (t-\tau) \end{pmatrix} \widehat{h}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Définissons maintenant les fonctions w et k par

$$w(\xi) := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mid \xi \mid t & \sin \mid \xi \mid t \\ -\sin \mid \xi \mid t & \cos \mid \xi \mid t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mid \xi \mid \hat{u}_0(\xi) \\ \widehat{u}_1(\xi) \end{pmatrix}$$

$$k(\tau) := \begin{pmatrix} k_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mid \xi \mid t & \sin \mid \xi \mid t \\ -\sin \mid \xi \mid t & \cos \mid \xi \mid t \end{pmatrix}$$

et

$$\| v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} := \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} = \sqrt{\| v_1 \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} + \| v_2 \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\| w(\xi) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} &[\cos^2 \mid \xi \mid t \mid \xi \mid^2 \widehat{u}_0^2(\xi) + \sin^2 \mid \xi \mid t \widehat{u}_1^2(\xi) \\ &+ 2 \mid \xi \mid \cos \mid \xi \mid t \sin \mid \xi \mid t \widehat{u}_0(\xi) \widehat{u}_1(\xi) \\ &+ \sin^2 \mid \xi \mid t \mid \xi \mid^2 \widehat{u}_0^2(\xi) + \cos^2 \mid \xi \mid t \widehat{u}_1^2(\xi) \\ &- 2 \mid \xi \mid \sin \mid \xi \mid t \cos \mid \xi \mid t \widehat{u}_0(\xi) \hat{u}_1(\xi)] d\xi.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| w(\xi) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\mid \xi \mid^2 \hat{u}_0^2(\xi) + \widehat{u}_1^2(\xi) \right] d\xi = \left\| \begin{pmatrix} \mid \xi \mid \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)}$$

et

$$\| k(\tau, \xi) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}^2(\xi, \tau) d\xi = \| \hat{h}(\tau) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)}$$

$$\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)} \leq \| w \|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)} + \int_0^t \| k(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)} \, d\tau.$$

D'où par le théorème de Plancherel

$$| \mathrm{D}u |_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} (t) \leq \| \mathrm{D}u \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} (0) + \int_0^t \| h(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \, d\tau.$$

et plus généralement si $t \geq t^{'}$:

$$\| \mathrm{D}u \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} (t) \leq \| \mathrm{D}u \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} (t^{'}) + \int_{t^{'}}^t \| h(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \, d\tau.$$

Deuxième étape : On étudie dans cette partie le problème linéaire global localisé sur le cône de lumière.
On considère alors les demi-cônes de lumières futur et passé de sommet $z_0 = (t_0, x_0)$ notés

$$K \pm (z_0) := \{ z = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / \mid x - x_0 \mid \leq \pm (t - t_0) \}$$

De façon standart, on considère (cf [27]) $K^-(z_0)$ de sommet z_0 de frontière latérale $M^-(z_0) = \{ z = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / \mid x - x_0 \mid = (t - t_0) \}$ et sections horizontales aux niveaux t :

$$\mathrm{D}(t, z_0) = K^-(z_0) \cap \{ \{t\} \times \mathbb{R}^n \} \qquad \forall \, t \leq t_0.$$

$$\mathrm{D}(t, z_0) = \{t\} \times \mathrm{B}(x_0, t_0 - t) \qquad \forall \, t \leq t_0.$$

De plus pour $s < t < t_0$ on note

$$K_s^t(z_0) := K^-(z_0) \cap \{ [s, t] \times \mathbb{R}^n \}$$

et

$$M_s^t(z_0) := M^-(z_0) \cap \{ [s, t] \times \mathbb{R}^n \},$$

le cône tronqué aux niveaux s et t et sa frontière latérale et pour simplifier la notation on pose :

$$K_0(z_0) = K_0^{t_0}(z_0) \ et \ M_0(z_0) = M_0^{t_0}(z_0).$$

Pour tout $z_0 = (t_0, x_0)$ fixé dans $\mathbb{R}^n$, en suivant [27], on construit la solution de 1.4 sur le cône K_0 de la façon suivante :

Sans en perdre la généralité, on peut déplacer x_0 au point 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.5 *Lorsque* $u_0\backslash_{\mathrm{D}(0,z_0)} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))$, $\nabla u_0\backslash_{\mathrm{D}(0,z_0)} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))$, $u_1\backslash_{\mathrm{D}(0,z_0)} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))$ *et* $h \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)$ *avec* $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0) = \{v \ ; \ t \in [0,t_0] \longrightarrow \|v(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \textit{est continue}\}$, *il existe une solution unique de*

$$\begin{cases} \Box u = h & \textit{dans } K_0 \\ u/_{t=0} = u_0, \ u_t/_{t=0} = u_1 & \textit{dans } \mathrm{D}(0,z_0) \end{cases} \tag{1.7}$$

de classe $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)$ *ainsi que* $\mathrm{D}u$.
De plus on a l'inégalité :

$$\mid w(t) \mid_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \exp t\{\mid \mathrm{w} \mid_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} (0) + (\int_0^t \mid h(r) \mid^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(r,z_0))} dr)^{\frac{1}{2}}\} \tag{1.8}$$

où $w = (u, \mathrm{D}u)$ *et*

$$\begin{aligned} \mid w(t) \mid_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} &= \left(\int_{\mathrm{D}(t,z_0)} w(t,x) \cdot \overline{w(t,x)} dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathrm{D}(t,z_0)} \left[u(t,x).\overline{u(t,x)} \right] + \left[\mathrm{D}u(t,x).\overline{\mathrm{D}u(t,x)} \right] dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Preuve : La première partie du lemme se démontre à partir de l'inégalité d'énergie de façon standart (cf [26]). Démontrons l'inégalité d'énergie : $\Box u = h$ s'écrit

$$\partial_t^2 u = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sum_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i^n 0\partial_i u + 0\partial_t u + 0u + h.$$

On pose

$$w_1 = \partial_1 u, \cdots, \partial_n u, \ w_{n+1} = \partial_t u, \ w_{n+2} = u$$

On obtient le système d'ordre 1 équivalent suivant

$$\partial_t w_i = \partial_i w_{n+1} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

D'où la combinaison linéaire ;

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \partial_t w_j - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \partial_j w_{n+1} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \\ \partial_t w_{n+1} - \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \delta_{ij} \partial_j w_i = h \\ \partial_t w_{n+2} - w_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Ce système est de la forme

$$A^0 \partial_t w + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_j w + Bw = H,$$

avec $A^0 = I_{n+2}$ la matrice identité d'ordre $n+2$ et

$$A^j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappel de notations : Soit $z_0 = (x_0, t_0)$. En posant, pour tout $0 \leq t \leq t_0$, $D(x_0, t - t_0) := B(x_0, t_0 - t)$ on note

$$* \ K_0 := \{(t, x); x \in \mathrm{D}(t, z_0)\}$$

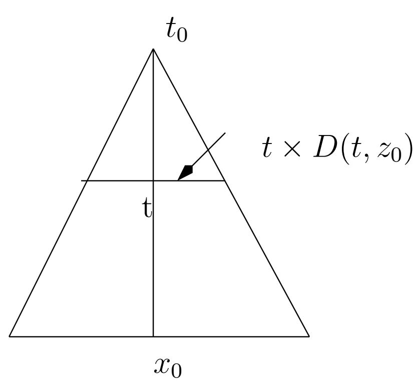


Fig. 1.1 –

$$*w := \mid w \mid \overline{w} \ et \ \mid \overline{w} \mid = 1,$$

Soit

$$\mathrm{L} = A^0 \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A^j \partial_j + B,$$

$$\Re(\mathrm{L}w \cdot \overline{w}) = \Re(A^0\partial_t w \cdot \overline{w} + \sum_{j=1}^{n} A^j\partial_j w \cdot \overline{w} + Bw \cdot \overline{w}) = \Re(F \cdot \overline{w}).$$

Or pour tout $j = 1 \cdots n$ on a

$$\begin{aligned}
\partial_j(A^j w.\overline{w}) &= (\partial_j A^j)w.\overline{w} + A^j\partial_j w.\overline{w} + A^j w.\overline{\partial_j w} \\
&= (\partial_j A^j)w.\overline{w} + A^j\partial_j w.\overline{w} + w.\overline{A^j\partial_j w} \\
&= (\partial_j A^j)w.\overline{w} + 2Re(A^j\partial_j w.\overline{w}),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&Div_{(t,x)}\begin{pmatrix} A^0 w.\overline{w} \\ A^1 w.\overline{w} \\ \vdots \\ A^n w.\overline{w} \end{pmatrix} \\
&\qquad = (\partial_t A^0)w \cdots \overline{w} + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j A^j)w \cdots \overline{w} + 2\Re\sum_{j=0}^{n}(A^j\partial_j w \cdots \overline{w}) \\
&\qquad = (\partial_t A^0)w.\overline{w} + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j A^j)w.\overline{w} + 2\Re Lw.\overline{w} - 2\Re\ Bw.\overline{w} \\
&\qquad = (\partial_t A^0)w.\overline{w} + \sum_{j=1}^{n}(\partial_j A^j)w.\overline{w} + 2\Re\ F.\overline{w} - 2\Re\ Bw.\overline{w}.
\end{aligned}$$

Donc en posant $H = \partial_t A^0 + \sum_{j=1}^{n}\partial_j A^j - 2B$, et puisque $(\partial_j A^j)w.\overline{w}$ est réel pour tout $0 \leq j \leq n$, on a par la formule de Stocks $\left(\int_M div\mathcal{F}dv = \int_{\partial M} < \mathcal{F}, n > d\mathcal{S}\right)$;

$$\int_{K_0^t(z_0)}(\Re\ Hw.\overline{w} + 2\Re\ F.\overline{w}) = \int_{\partial K_0^t(z_0)}(\overrightarrow{n})_t A^0 w.\overline{w} + \sum_{j=1}^{n}(\overrightarrow{n})_j A^j w.\overline{w}, \quad (1.9)$$

où $(n_t, n_1, \cdots, n_n) = \overrightarrow{n}$ est la normale unitaire extérieure sur $\partial K_0^t(z_0)$. En effet $\overrightarrow{n} = (-1, 0, \cdots, 0)$ sur $\{0\} \times \mathrm{D}(x_0, t_0)$ et $\overrightarrow{n} = (1, 0, \cdots, 0)$ sur $\{t\} \times \mathrm{D}(x_0, t_0)$.

Posons $M = \{(s,x)\ ;\ s = \gamma(x) = t_0- \mid x \mid$ et $x \in \mathrm{D}(x_0,0), 0 \leq s \leq t\}$ la surface latérale et $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}}(1,-\nabla\gamma) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\dfrac{x}{|x|})$. D'où (1.9) s'écrit

$$\begin{aligned}\int_{K_0^t(z_0)} \Re Hw.\overline{w} + 2\Re F.\overline{w} &= \int_{\mathrm{D}(t,z_0)} w(t,x).\overline{w(t,x)}dx - \int_{\mathrm{D}(0,z_0)} w(0,x).\overline{w(0,x)}dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_M \Big(w.\overline{w} - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\mid x \mid} A^j w.\overline{w}\Big).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} A^j w \cdot \overline{w} &= (\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_j, \cdots, \overline{w}_{n+1}, \overline{w}_{n+2}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -w_{n+1} \\ \vdots \\ -w_j \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\overline{w}_j w_{n+1} - \overline{w}_{n+1} w_j \\ &= -2\Re\overline{w}_j w_{n+1} \\ \mathit{donc} \mid A^j w \cdot \overline{w} \mid &\leq |w|^2 + |w_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\mid x \mid} A^j w.\overline{w} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\mid x \mid}(-2\Re\overline{w_j} w_{n+1}) = -w_{n+1}\sum_{j=1}^n \frac{x_j\overline{w_j}}{\mid x \mid} - \overline{w_{n+1}}\sum_{j=1}^n \frac{x_j w_j}{\mid x \mid}.$$

Et comme

$$\Big| -\sum_{j=1}^n (\frac{w_{n+1}x_j\overline{w_j}}{\mid x \mid}) - \sum_{j=1}^n (\frac{\overline{w_{n+1}}x_j w_j}{\mid x \mid})\Big| \leq (\partial_t u)^2 + \mid \nabla u \mid^2 \leq w \cdot \overline{w},$$

alors

$$|w(t)|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} \leq |w(0)|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + \int_0^t \int_{\mathrm{D}(s,z_0)} (-2\Re(Bw \cdot \overline{w}) + 2\Re F \cdot \overline{w})\ dx\ ds.$$

D'autre part,

$$-Bw \cdot \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -w_{n+1} = \partial_t u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_{n+1} \\ \overline{w}_{n+2} \end{pmatrix} = -\overline{u}\partial_t u.$$

Ce qui signifie que $2\Re(Bw \cdot w) = \partial_t |u|^2$ et

$$F \cdot \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u}_{x_1} \\ \vdots \\ \overline{u}_{x_n} \\ \overline{u}_t \\ \overline{u} \end{pmatrix} = f \cdot \overline{u}_t.$$

D'où

$$\Big| \mid \nabla u \mid^2 + \mid u_t \mid^2 + \mid u \mid^2 \Big|_{\mathrm{D}(t,z_0)} \leq \Big| \mid \nabla u \mid^2 + \mid u_t \mid^2 + \mid u \mid^2 \Big|_{\mathrm{D}(0,z_0)} + \int_0^t \left(2 \mid \partial_t u \mid^2_{\mathrm{D}(s,z_0)} + \mid f \mid^2_{\mathrm{D}(s,z_0)} \right) ds,$$

et d'après le lemme de Gronwall

$$(\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t \varphi h dr \Rightarrow \varphi(t) \leq g(x) \exp \int_0^t h(r)\ dr)$$

où

$$\varphi = \mid \nabla u \mid^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + \mid u_t \mid^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + \mid u \mid^2_{\mathrm{D}(t,z_0)},\ h = 2 \text{ et}$$

$$g = |\nabla u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u_t|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + \int_0^t |f|^2_{\mathrm{D}(s,z_0)} ds,$$

On obtient,

$$|\nabla u|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + |u_t|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + |u|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} \leq \Big[|\nabla u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u_t|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + \int_0^t |f|^2_{\mathrm{D}(s,z_0)} ds \Big] e^{2t}$$

et

$$\Big[|\nabla u|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + |u_t|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} + |u|^2_{\mathrm{D}(t,z_0)} \Big]^{1/2} \leq \Big[\Big(|\nabla u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u_t|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} + |u|^2_{\mathrm{D}(0,z_0)} \Big)^{1/2} + \Big(\int_0^t |f|^2_{\mathrm{D}(s,z_0)} ds \Big)^{1/2} \Big] e^t.$$

On sait que cette inégalité (cf [26] chapitre 3) cette inégalité permet de démontrer le lemme 1.5 en utilisant le théorème de Cauchy Kowalewski et en globalisant sur le cône de lumière $K_0(z_0)$ par approximation des fonctions.

Lemme 1.6 *Si h est nulle en dehors de $K_0(z_0)$ et u_0, u_1 nuls en dehors de $D(0, z_0)$ alors la solution u du problème de Cauchy posé dans le lemme 1.5 vérifie*

$$|\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq |\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t |h(s)|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds. \tag{1.10}$$

Preuve. Ceci est évident car sous ces hypothèses

$$\begin{aligned} |\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}(t) &\leq |\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}(t) \\ &\leq |\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}(0) + \int_0^t |h(s)|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ &= |u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t |h(s)|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds. \end{aligned}$$

Lemme 1.7 *La solution du problème posé dans le lemme 1.5 vérifie l'inégalité*

$$|\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq |\mathrm{D}u|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t |h(s)|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds. \tag{1.11}$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme 1.6 et du lemme 1.8 suivant ;
Pour énoncer le lemme 1.8 on aura besoin d'introduire les notions suivantes

Définition 1.3 *[27] Soient $u_0 \in L^2(D(0, z_0 = (t_0, x_0)))$ et $u_1 \in L^2(D(0, z_0))$. On définit :*

(i) $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0) = \{v; t \longrightarrow \| v(t) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}$ *est continue sur* $[0, t_0]\}$

(ii) $X = \{v \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)\mathrm{D}v \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0), v/_{t=0} = u_0, v_t/_{t=0} = u_1\}$

(iii) Les opérateurs d'extension $E_p = E_p(t) : \mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t, z_0)) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ qui à v associe v_p de la façon suivante : Soit $\varphi_p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 1$ dan sun voisinage de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n(0,1)}$ et $\varphi_p = 0$ dans $\mathcal{B}^c_{\mathbb{R}^n}(0, 1 + \frac{1}{p})$.
Alors

$$v_p = E_p(t)v(x) = \begin{cases} v(x) & si \quad | x |< t \\ \varphi_p(\frac{x}{t})v(\frac{t^2}{\|x\|^2}x) & si \quad | x |> t \end{cases}$$

on a

$$\|v\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} \leq \|v\|_{\mathcal{C}^0([0,t_0],\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))} \leq c\|v\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)}$$

où c est indépendante de z_0.

On a le lemme suivant :

Lemme 1.8 *Si u est solution du problème posé dans le lemme 1.5 alors en considérant*

$$\mathcal{U}_p(t) = (\partial_t R(t) * \widetilde{u_0} + R(t) * \widetilde{u_1} + \int_0^t R(t-s) * h_p(s)ds)_{\ \mathrm{D}(t,z_0)} = v_p(t)_{\ \mathrm{D}(t,z_0)}$$

où

$$\begin{array}{ll} \widetilde{u}_0 = u_0 & \textit{prolongée par } 0 \textit{ en dehors de } D(0,z_0), \\ \widetilde{u}_1 = u_1 & \textit{prolongée par } 0 \textit{ en dehors de } D(0,z_0), \\ h_p(s) = E_p(s)h(s,x), & \end{array}$$

les propiétés suivantes ont lieu :

$$u \textit{ et } \mathcal{U}_p \textit{ appartiennent à } X \quad \textit{et} \quad u = \lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p \textit{ dans } X.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_p(t)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} &\leq \|v_p(t)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \|R(t-s)\star h_p(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}ds + \|\partial_t R(t)\star \widetilde{u}_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|R(t)\star \widetilde{u}_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \|\widehat{R}(t-s)\widehat{h}_p(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}ds + \|\widehat{\partial_t R}\widehat{u}_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|\widehat{R}(t)\widehat{u_1}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \frac{\mid t-s\mid}{(2\Pi)^{n/2}}\|h_p\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)}ds + \frac{1}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\ &\quad \frac{t}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \frac{t}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|D\mathcal{U}_p(t)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} &\leq \|Dv_p(t)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} \\
&\leq \int_0^t \|DR(t-s)\star h_p(s)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}ds+\frac{1}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\quad +\frac{t}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\leq \int_0^t \|D\widehat{R(t-s)}\widehat{h}_p(s)\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}ds+\frac{1}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\quad +\frac{t}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\leq \int_0^t \frac{t-s}{(2\Pi)^{n/2}}\|\frac{h_p(s)}{(2\Pi)^{n/2}}\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}ds+\frac{1}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))}|| \\
&\quad +\frac{t}{(2\Pi)^{n/2}}\|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\leq c(t^2\|h_p\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+\|h_p\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+t\|u_1\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\quad +\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))}).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\|\mathcal{U}_p-\mathcal{U}_{p'}\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} \leq \int_0^t \frac{t-s}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}}\|h_p-h_{p'}\|_{\substack{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\\ [0,t_0]}} ds$$

et

$$\|D(\mathcal{U}_p-\mathcal{U}_{p'})\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} \leq \sup_{t\in[0,t_0]} c(t+t^2)\ \|\ h_p-h_{p'}\|_{\substack{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\\ [0,t_0]}}\ .$$

Donc $(\mathcal{U}_p)_p$ et $(D(\mathcal{U}_p))_p$ admettent des limites dans $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)$.
D'autre part

$$\begin{cases} (\Box v_p)/_{K_0}=h_p/_{K_0}=h \quad \text{d'après le lemme 1.3 et 1.4} \\ v_p/_{\mathrm{D}(0,z_0)}=u_0,\ (v_p)_t/_{\mathrm{D}(0,z_0)}=u_1 \end{cases}$$

D'où pour toute $\varphi\in\mathcal{D}(K_0(z_0))$

$$\begin{aligned}
< D\mathcal{U}_p,\varphi > &= -<\lim\mathcal{U}_p, D\varphi> \\
&= -\lim <\mathcal{U}_p, D\varphi> \\
&= \lim < D\mathcal{U}_p,\varphi> \\
&=< D\lim\mathcal{U}_p, D\varphi>
\end{aligned}$$

C.à.d $D(\lim \mathcal{U}_p) = \lim D\mathcal{U}_p$ au sens des distributions.
De plus

$$\begin{aligned} < \Box \lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p, \varphi > =< \lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p, \Box\varphi > &= \lim_{p\to\infty} < \mathcal{U}_p, \Box\varphi > \\ &= \lim_{p\to\infty} < \Box\, \mathcal{U}_p, \varphi > \\ &=< h, \varphi > . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \Box \lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p = h \\ \lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p(t=0) = u_0, \quad (\lim_{p\to\infty} \mathcal{U}_p)_t(t=0) = u_1 \end{cases}$$

A l'aide des lemmes 1.8 et 1.6 on a :

$$\|D\mathcal{U}_p\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \|D\mathcal{U}_p(0)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t \|h_p(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s+\frac{1}{p},z_0))},$$

Finalement, en faisant tendre p vers l'infini on obtient :

$$\|Du(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \|Du_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t \|h(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))}.$$

Troisième étape : *Problème non linéaire.*
Construction de l'opérateur L.

Lemme 1.9 *On considère F défini dans le problème* (1.4)*, X du lemme 1.8, les hypothèses de la proposition 1.1 et les opérateurs L_p agissant sur X^2 qui à tout $w \in X^2$ associent*

$$L_p(w) = \{\partial_t R(t) * \widetilde{w}_0 + R(t) * \widetilde{w}_1 + \int_0^1 R(t-s) * F(w_p(s))ds\}/_{\mathrm{D}(t,z_0)}.$$

Alors $\{L_p(w)\}_p$ et $\{DL_p(w)\}_p$ admettent des limites dans $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)$ (c.à.d $(L_p w)_p$ a une limite dans X^2 notée Lw) et

$$\| DLw \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \| Dw(0) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} + \int_0^t | F(w(s)) |_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds. \quad (1.12)$$

Preuve du lemme 1.9. C'est une conséquence du lemme 1.8 et du lemme suivant

Lemme 1.10 *$F(w) \in X^2$ si $w \in X^2$.*

Preuve du lemme 1.10. Pour tout $t, w(t,x)$ est définie pour presque tout x

$$\forall (w_0, w_1) \in \mathrm{H}^1_{loc} \times \mathrm{L}^2_{loc}, \left|F(w(t,x))\right| \leq |F(0)| + c \mid w(t,x) \mid$$

d'où

$$\|F(w(t,x))\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)} \leq \mid F(0) \mid \mu(K_0) + c \parallel w \parallel_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K_0)},$$

$$\|F(w(t,x))\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} = \int_{\mathrm{D}(t,z_0)} F(w(t,x))\overline{F(w(t,x))}dx,$$

et

$$DF(w(t,x)) = \nabla F(w,t,x).Dw(t,x)$$

ce qui donne

$$\parallel DF(w,t,x) \parallel_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \leq [F]_{\mathcal{C}0,1} \parallel w \parallel_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} .$$

D'où la continuité en t pour $\|F(w(t,.))\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)}$ et $\|DF\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)}$.(Cf. Chps. 3 et 4 de [26], pages 19-20 et 37 de [27]).

D'autre part on a l'inégalité d'énergie d'après le lemme 1.7 ;

Lemme 1.11 *La solution dans X^2 de*

$$\begin{cases} \Box w = F(w) \\ w(t=0) = w_0, \ w_t(t=0) = w_1 \end{cases}$$

est le point fixe de L dans X^2.

La preuve du lemme est triviale du fait que U_p est le point fixe de L_p dans X^2.

Quatrième étape : Preuve de la proposition 1.1. Pour tout $w \in X$, on notera (Cf. lemmes 1.5 et 1.7) $\widetilde{w} = (\widetilde{u,v}) = L(u,v) = Lw$ la solution dans X^2 de

$$\begin{cases} D\beta = F(w(t)) \\ \beta(0) = w_0 \\ \beta_t(0) = w_1. \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité d'énergie donnée par le lemme 1.7 on a :

$$\|D\widetilde{w}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \|D\widetilde{w}(t')\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t',z_0))} + \int_{t'}^{t} \|F(w(s))\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))}ds.$$

D'où, si $t > t'$ on a

$$\frac{\|D\widetilde{w}(t)\| - \|D\widetilde{w}(t')\|}{t-t'} \leq \frac{\int_{t'}^{t} \|F(w(s))\|ds}{t-t'}$$

et en faisant tendre $t^{'}$ vers t par valeurs inférieures

$$\frac{d}{dt} \parallel D\widetilde{w}(t) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \parallel F(w(t)) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}, \tag{1.13}$$

et en utilisant la linéarité on a pour tout w et $w^{'}$ dans X^2

$$\frac{d}{dt} \parallel D(Lw - Lw^{'}) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} (t) \leq \parallel F(w(t)) - F(w^{'}(t)) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} .$$

Or, comme $D(t, z_0) \subset D(s, z_0)$ on a

$$\begin{aligned}
&\left\|F(w(t)) - F(w^{'}(t))\right\|_{[\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))]^2} \\
&= \left\| \int_0^1 \nabla F(w' + r(w - w')).(w - w')dr \right\|_{[\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))]^2} \\
&\leq \int_0^1 \left\|\nabla F(w'(t) + r(w - w')(t)).(w - w')(t)\right\|_{[\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))]^2} dr \\
&\leq \int_0^1 [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \parallel (w - w')(t) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} dr \\
&= [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \parallel w - w' \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \\
&\leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \parallel \int_0^t \partial_s(w - w')(s)ds \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \\
&\leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \int_0^t \parallel \partial_s(w - w')(s) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} ds \\
&\leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \int_0^t \parallel \partial_s(w - w')(s) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \parallel D(Lw - Lw') \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \int_0^t \parallel \partial_s(w - w')(s) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds.$$

Intégrons maintenant de 0 à τ par rapport à t. On obtient

$$\begin{aligned}
&\parallel D(Lw - Lw') \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} - \parallel D(Lw - Lw') \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))} \\
&\qquad \leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \int_0^t \int_0^\tau \parallel \partial_s(w - w')(s) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} dsd\tau
\end{aligned}$$

et puis par integration par parties on a

$$\int_0^t \int_0^\tau \| \partial_t (w - w')(s) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))} ds d\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau) \| \partial_\tau (w - w')(\tau) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(\tau,z_0))} \, d\tau.$$

Maintenant, puisque $0 \leq t \leq t_0$;

$$\| D(Lw - Lw')(t) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \, \frac{t_0^2}{2} \, \| D(w - w') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)},$$

d'où

$$\| D(Lw - Lw') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \, \frac{t_0^2}{2} \, \| D(w - w') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \, .$$

D'autre part, comme $(Lw - Lw')(t) = \int_0^t \partial_\tau (Lw - Lw')(\tau) d\tau$, d'où

$$\| (Lw - Lw')(t) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq t_0 \;\; \| D(Lw - Lw') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)}$$

et

$$\| Lw - Lw' \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \leq t_0 \;\; \| D(Lw - Lw') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \, .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\| Lw - Lw' \|_{X^2} \\
&\quad = \| Lw - Lw' \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} + \| D(Lw - Lw') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \\
&\quad \leq (1 + t_0) \, \| D(Lw - Lw') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \\
&\quad \leq (1 + t_0) \, [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \, \frac{t_0^2}{2} \, \| D(w - w') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} \\
&\quad \leq (1 + t_0) \, \frac{t_0^2}{2} \, [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \, (\| w - w' \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} + \| D(w - w') \|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)}) \\
&\quad \leq \; [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \, \frac{t_0^2}{2} \, (1 + t_0) \;\; \| w - w' \|_{X^2}
\end{aligned}$$

ce qui signifie que si $\frac{t_0^2}{2}(1 + t_0) < [F]_{\mathcal{C}^{0,1}}$, alors L est une contraction dans X^2.

Posons

$$p = \frac{t_0^2}{2} \, (1 + t_0) - [F]_{\mathcal{C}^{0,1}},$$

$$p'_{t_0} = \frac{3t_0^2}{2} + t_0 = \frac{t_0}{2}(3t_0 + 2)$$

et α la premier zéro positif de $p(t_0) = p$.

On obtient

Lemme 1.12 *Si $0 < t_0 < \alpha$ alors L est une contraction de X^2.*

*Puisque X est complet , L possède un point fixe unique $w = (u, v) \in X$ et (1.4) admet une solution unique de classe $\mathcal{C}^0\mathrm{H}^1(K) \cap \mathcal{C}^1\mathrm{L}^2(K)$.

* On observe que t_0 peut être choisi indépendamment de la donnée de Cauchy.

Ainsi on peut courrir une bande $[0, \frac{\alpha}{2}] \times \mathbb{R}^n$ du demi espace temps $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ pour une infinité dénembrable de cônes de hauteur α.

* En utilisant l'unicité sur les intersections de cônes , on conclut que le problème de cauchy (1.4) avec les données de Cauchy $(w_0, w_1) \in (\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n))^2 \cap (\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))^2$ admet une solution unique w telle que $Dw \in [\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}([0, \alpha] \times \mathbb{R}^n)]^2$.

* En itérant l'argument avec α fixé (ie. on prend les données de cauchy sur l'hyperplan $t = \frac{\alpha}{2}$) , on voit que $w = (u, v)$ peut être étendu sur $[\frac{\alpha}{2}, \alpha] \times \mathbb{R}^n$, puis sur $[\alpha, \frac{3\alpha}{2}] \times \mathbb{R}^n$ et de proche en proche à tout le demi espace $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ de l'espace temps.

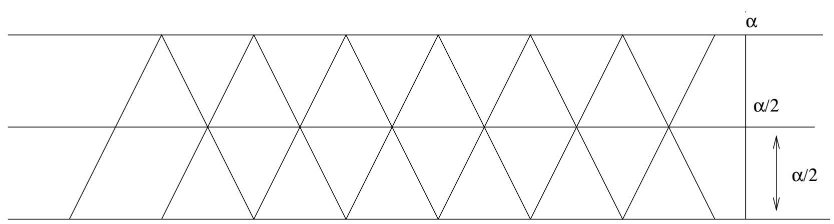


FIG. 1.2 –

Ce qui achève la démonstration de la proposition 1.1

Corollaire 1.1 *Sous l'hypothèse supplémentaire $(w_0,\ w_1) \in [\mathrm{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)]^2 \times [\mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)]^2$ la solution w du problème (1.4) considéré dans la proposition 1.1 est telle que $D^2w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$.*

Preuve du corollaire. Soit ∂ une dérivée spatiale. On a

$$\Box \partial w - \nabla F(w) \cdot \partial w = 0, \tag{1.14}$$

avec

$$\partial w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + \beta \, \frac{\partial w}{\partial t}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\partial[F(w)] &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nabla F(w)\cdot\nabla_i w+\beta\nabla F(w)\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\\ &= \nabla F\cdot\partial w\\ &= F^{'}(w)\cdot\partial w.\end{aligned}$$

D'autre part, en notant $w/_{t=0}=w_0$ et $w_t/_{t=0}=w_1$ on a

$$\partial w/_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial w_0}{\partial x_i}+\beta\ \partial w_1,$$

ainsi,

$$\begin{aligned}(\partial w)_t/_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial(w_t)}{\partial x_i}/_{t=0}+\beta\frac{\partial(w_t)}{\partial t}/_{t=0}+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)_t\frac{\partial(w)}{\partial x_i}/_{t=0}\\ &\qquad+(\beta)_t\frac{\partial(w)}{\partial t}/_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial(w_1)}{\partial x_i}+\beta(\triangle w_0+F(w_0))+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,t}(0,x)\frac{\partial(w_0)}{\partial x_i}\\ &\qquad+(\beta_t)(0,x)w_1.\end{aligned}$$

et l'inégalité de l'énergie (1.13) donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|D\partial w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} &\leq\| F'(w).\partial w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}\\ &\leq\ [F]_{\mathcal{C}^{0,1}}\ \|\ \partial w\ \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}\end{aligned}\tag{1.15}$$

et

$$\|\ D\partial w\ \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}\leq\|\ D\partial w(0)\ \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(0,z_0))}+[F]_{\mathcal{C}^{0,1}}\int_0^t\|\ \partial w\ \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(s,z_0))}(s)ds.\tag{1.16}$$

Le deuxième membre de (1.16) est borné sur $K(z_0)$ d'aprés l'hypothèse du corollaire et le fait que d'aprés la proposition 1.1 $Dw\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ et $w\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$. Cela bien sûr implique que $\|\ D\partial w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}$ est borné sur $K(z_0)$ (*). D'autre part, on remarque que w_{tt} peut être éstimée par l'équation (1.4) $w_{tt}=\triangle w+F(w)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))$(**).

$$\| w_{tt} \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \| \triangle w \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} + \| F(w) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} .$$

Puisque $\| \triangle w \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}$ et $\| F(w) \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}$ sont bornées sur $K(z_0)$ (d'aprés (*) pour $\| \triangle w \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))})$, on en déduit que $\| w_{tt} \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))}$ est bornée sur $K(z_0)$.

D'aprés le principe de Duhamel

$$w(t,x) = w^0(t) + \int_0^t R(t-s) * F(w(s))ds$$

où $w^0(t) = R_t(t,x) * w_0 + R(t,x) * w_1$. Ainsi ;

$$\partial_t w(t,x) = R_{tt}(t,x) * w_0 + R_t(t,x) * w_1 + \int_0^t R_t(t-s) * F(w(s))ds,$$

$$\partial^2_{tx_i} w(t,x) = R^2_{tt}(t,x) * (w_0)_i + R^2_{tx_i} * w_1 + \int_0^t R_{tt}(t-s) * F(w(s))ds$$

et

$$\partial^2_{tt} w(t,x) = R_{ttt}(t,x) * w_0 + R_{tt}(t,x) * w_1 + F(w(t)) + \int_0^t R_{tt}(t-s) * F(w(s))ds.$$

On en déduit la continuité en t de $D^2 w(t)$.

Par conséquent $D^2 w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ c.à.d $D^2 w/_{K(t,z_0)} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K(t,z_0))$ et ce pour tout $t = z_0$ et $K(z_0)$.

1.3 Solution $\mathcal{C}^\infty$ de (1.4) : cas $n \in \{1,2\}$

Définition 1.4 *On appelle $\mathcal{C}^{0,\infty}$ la classe des fonctions F continues, infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les différentielles $D^k F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2))$ sont borneés sur $\mathbb{R}^2$.*

Corollaire 1.2 *(***cas :** $n = 1$ **ou** 2*). Si $F \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $(w_0, w_1) \in [\mathrm{H}^{+\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)]^2 = [\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)]^2$, alors le problème de Cauchy (1.3) ($\Leftrightarrow$ (1.4)) admet une solution unique $w = (u,v)$ telle que $D^k w/_K \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)(\forall\ k \in \mathbb{N}, \forall\ K(z_0) = K)$ et par conséquent $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.2 1) $\mathrm{H}^{+\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *En effet,*

$$w_0 \in \mathrm{H}^{+\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ \forall k,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \varphi D^k w_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $w_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $D^k w \in \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *c.à.d* $w_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \varphi w_0 \in \mathrm{H}^k(\mathbb{R}^n), \forall k \in \mathbb{N},$ *car*

$$D^k(\varphi w) = \sum_{|l|=0}^{|l|=|k|} \mathrm{C}_k^l \ \varphi^{(l)} \ w^{(k-l)}$$

ce qui n'est autre que

$$\begin{cases} w_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ \varphi w_0 \in \mathrm{H}^{+\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

C.à.d, $w_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *et ,* $\varphi w_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Ainsi,

$$w_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Réciproquement, si $w_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *alors,*

$$\forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ \forall \ k \in \mathbb{N}, \ \varphi D^k w_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

Ce qui donne, $w_0 \in \mathrm{H}^{+\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

2) *Soit* $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall K = K(z_0), \ D^k w/_k \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$.
Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ *il existe* K *tel que supp*$\varphi \subset \dot{K}$.
Et comme

$$D^k(\varphi w) = \sum_{|l|=0}^{|l|=|k|} \mathrm{C}_k^l \ \varphi^{(l)} \ w^{(k-l)} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(\dot{K}),$$

alors, $\varphi w \in \mathcal{C}^k\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n), \ \forall k \in \mathbb{N},$ *ce qui donne* $\varphi w \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. *Et par conséquent* $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$.

Preuve du corollaire 1.2. (On itère le corollaire 1.1). En effet, d'après le corollaire 1.1 on a pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^{0,1}$

$$\Box(\partial w) = F'(w)\partial w = F_1(w, \partial w),$$

avec l'inégalité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \parallel D(\partial w) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \parallel F'(w)\partial w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \ [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \parallel \partial w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))},$$

Maintenant, pour $F \in \mathcal{C}^{0,2}$ on a

$$\Box \partial^2 w = F'(w).\partial^2 w + F''(w)(\partial w, \partial w) = F_2(w, \partial w, \partial^2 w),$$

et encore une fois, l'inégalité d'énergie donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \parallel D\partial^2 w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} &\leq \parallel F'(w)\partial^2 w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} + \parallel F''(w)(\partial w, \partial w) \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \\ &\leq [F]_{\mathcal{C}^{0,1}} \parallel \partial^2 w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} + [F]_{\mathcal{C}^{0,2}} \parallel (\partial w)^2 \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} .\end{aligned}$$

Remarque 1.3 *D'aprés ([6],p168) :*

1) *Soit Ω ouvert de classe $\mathcal{C}^1$ avec Γ borné ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, et $1 \leq p \leq +\infty$. On a*

$$\begin{aligned}&Si \;\; 1 \leq p < n, \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathrm{L}^{p^*}(\Omega) \;\; où \; \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \\ &Si \; p = n, \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \; \forall q \in [n, +\infty[. \\ &Si \; p > n \; , \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathrm{L}^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

2) *(Rellich - Kondrachov). On suppose Ω bornée et de classe $\mathcal{C}^1$. On a :*

$$\begin{aligned}&Si \; p < n, \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \; \forall q \in [1, p^*[, \;\; \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ &Si \; p = n, \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathrm{L}^q(\Omega) \forall \; q \in [1, +\infty[\\ &Si \; p > n, \;\; alors \; W^{1,p} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}),\end{aligned}$$

avec injections compactes.

On applique ici ces résultats avec $\Omega = D(t, z_0)$. D'aprés le corollaire 1.1, $D^2 w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$, donc $\partial w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n))$.
En particulier, $\partial w/_{K(z_0)} \in \mathcal{C}^1([0, t_0], W^{1,2}(D(t, z_0)))$.

D'autre part, pour $n = 1$ on a $W^{1,2}(D(t, z_0)) \subset \mathcal{C}^0(\overline{D(t, z_0)})$, on peut alors écrire l'inégalité

$$\parallel (\partial w)^2 \parallel_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))} \leq \{ \sup_{x \in D(t,z_0)} \mid \partial w(t, x) \mid \} \parallel \partial w \parallel_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))},$$

pour w tel que $D^2 w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$.
Par conséquent, d'aprés l'inégalité d'énergie on a pour tout $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned}&\|D(\partial^2 w)\|_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))}(t) \\ &\qquad \leq \parallel D(\partial^2 w) \parallel_{\mathrm{L}^2(D(0,z_0))} (0) \\ &\qquad\qquad + t_0 [F]_{\mathcal{C}^{0,2}} (\sup_{t \in [0,t_0]} \parallel \partial^2 w \parallel_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))} + \mu(D(0, z_0)) [\sup_{K(z_0)} \mid \partial w \mid]^2),\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, $W^{1,2}(D(t,z_0)) \subset \mathrm{L}^q(D(t,z_0))$ $\forall q \in [2,\infty[$, et on a (grâce au fait que $\| (\partial w)^2 \|_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))} = \| \partial w \|^2_{\mathrm{L}^4(D(t,z_0))}$) :

$$\begin{aligned} \|D(\partial^2 w)\|_{\mathrm{L}^2(D(t,z_0))}(t) &\le \|D(\partial^2 w)\|_{\mathrm{L}^2(D(0,z_0))}(0) \\ &\quad + [F]_{\mathcal{C}^{0,2}} \int_0^t [\|\partial^2 w\|_{\mathrm{L}^2(D(\theta,z_0))} + \|\partial w\|^2_{\mathrm{L}^4(D(\theta,z_0))}](\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent pour $n \in \{1,2\}$,

$$D(\partial^2 w) \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)\ ,\ \forall K = K(z_0). \tag{1.17}$$

De plus, on peut estimer $w_{ttt} = \triangle w + F(w)$.

En effet $w_{ttt} = \triangle w_t + F'(w)w_t$, et la proposition 1.1 implique que $F'(w)w_t \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$. La même proposition donne $w_{xtt} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$ car $w_{xtt} = \triangle w_x + F'(w)w_x$ et d'après (1.17), $\triangle w_x \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$ et $F'(w)w_x \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$.
Ainsi, pour tout $K = K(z_0)$

$$D^3 w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K).$$

C.à.d

$$D^3 w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n).$$

En itérant on aura pour $F \in \mathcal{C}^{0,k}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \Box \partial^k w &= F'(w)\partial^k w + F''(w)(\partial w, \partial^{k-1} w) + \cdots + F^k(w)(\partial w)^k \\ &= F_k(w, \partial w, \cdots, \partial^k w). \end{aligned}$$

On aura besoin de poser l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\begin{cases} D^l w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) & \forall\ 0 \le l \le k \\ D^l w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n), & \end{cases}$$

et la définition suivante :

Définition 1.5 *Si $F \in \mathcal{C}^{0,k}(\mathbb{R}^2)$ on note :*

$$[F]_{\mathcal{C}^{0,k}} = \sup_{1 \le l \le k} \| F^{(l)} \|_{\mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}_l(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)} .$$

On obtient,

$$\frac{d}{dt} \parallel D\partial^k w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \ a_k \ [F]_{\mathcal{C}^{0,k}} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_h=k,\\ l_1\geq 1,\cdots,l_k\geq 1\\ 1\leq h\leq k}} \parallel \partial^{l_1} w \cdots \partial^{l_h} w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} .$$

Pour $n = 1$,

$$D^l w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) \qquad \forall \ 0 \leq l \leq k,$$

c.à.d

$$D^l w \in \mathcal{C}^0(K) \qquad \forall 0 \leq l \leq k,$$

et par conséquent,

$$\|\partial^{l_1} w \cdots \partial^{l_h} w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq \big[\sup_{K(z_0)} |\partial^{l_1} w|\big] \cdots \big[\sup |\partial^{l_{k-1}} w|\big] \big[\sup_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} |\partial^{l_k} w|\big],$$

et

$$\frac{d}{dt}\|D\partial^k w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} \leq a_k [F]_{\mathcal{C}^{0,k}} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_h=k,\\ l_1\geq 1,\cdots,l_k\geq 1\\ 1\leq h\leq k}} [\sup_{K(z_0)} \mid \partial^{l_1} w \mid \cdots \sup_{K(z_0)} \mid \partial^{l_k} w \mid] \times \mu(D(t,z_0)) < +\infty.$$

Pour $n = 2$, $\quad D^l w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) \qquad \forall 0 \leq l \leq k$ implique que pour tout $q \in [2,\infty[$, on a $D^{l-1} w \in \mathcal{C}^0 W^{1,2}(K) \subset \mathrm{L}^q(\Omega)$ et

$$\parallel \partial^{l_1} w \cdots \partial^{l_h} w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t)} \leq \parallel \partial^{l_1} w \parallel_{\mathrm{L}^{r_1}(\mathrm{D}(t))} \cdots \parallel \partial^{l_h} w \parallel_{\mathrm{L}^{r_h}(\mathrm{D}(t))},$$

avec $\dfrac{1}{r_1} + \cdots + \dfrac{1}{r_h} = \dfrac{1}{2}$.
Si $h = 1$, alors $l_h = l_1 = k$ et

$$\parallel \partial^{l_1} w \cdots \partial^{l_h} w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0)} = \parallel \partial^k w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0)},$$

et si $2 \leq h \leq k$ alors $1 \leq l_1 \leq k-1, \cdots 1 \leq l_h \leq k-1$. D'où

$$\begin{aligned} &\partial^{l_1} w \in \mathcal{C}^0 W^{1,2}(K) \text{ implique } \partial^{l_1} w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^{r_1}(K_t)\\ &\vdots\\ &\partial^{l_h} w \in \mathcal{C}^0 W^{1,2}(K) \text{ implique } \partial^{l_h} w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^{r_h}(K_t), \end{aligned}$$

car les injections

$$\begin{cases} W^{1,2}(\mathrm{D}(t)) \hookrightarrow \mathrm{L}^{r_1}(D(t)) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(D(t)) \\ \vdots \\ W^{1,2}(\mathrm{D}(t)) \hookrightarrow \mathrm{L}^{r_h}(D(t)) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(D(t)) \end{cases}$$

sont linéaires et uniformément continues par rapport à $t \in [0, t_0]$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|D\partial^k w\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0)} \\ &\qquad \leq a_k[F]_{\mathcal{C}^{0,k}} \times \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_h=k,\\ l_1\geq 1,\cdots,l_k\geq 1\\ 1\leq h\leq k}} \|\partial^{l_1} w\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^{r_1}(K)} \cdots \|\partial^{l_h} w\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^{r_h}(K)} \\ &\qquad\quad + \|\partial^k w\|_{\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \parallel D\partial^k w \parallel_{\mathrm{L}^2(\mathrm{D}(t,z_0))} (t)$$

est bornée sur $[0, t_0]$. On en déduit que pour $n = 1, 2$ et tout $K = K(z_0)$, $D\partial^k w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$.
On estime $w_{t^{k+1}}$, w_{xt^k}, $\cdots$, $w_{x^{k-1}t^2}$ par $w_{t^{k+1}} = \triangle w_{t^{k+1}} + (F(w))_{t^{k-1}}$ dont l'appartenance à $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$ résulte de la suite d'implications suivante :

$$w_{x^j t^{k+1-j}} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) \text{ implique } w_{x^{j-1}t^{k-j}} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K), \quad \forall\ 0 \leq j \leq k.$$

Donc $w_{x^{k-1}t^2} \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$ et proche en proche tous les premiers membres appartiennent à $\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$.
On a alors

$$D^{k+1}w/_K \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) \text{ et } D^{k+1}w \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n),$$

d'où le corollaire 1.2.

1.4 Solution de (1.1) dans les espaces de Sobolev

Le théorème 1.1 affirme que lorsque $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ et lorsque $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{H}^3_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ le problème de cauchy (1.1) admet une solution unique u telle que $D^2u \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$

Preuve du théorème 1.1. l'équation (1.1) peut s'écrire,

$$\begin{cases} \Box u = v \\ \Box v = f(u,v) \\ (u,u_t)/_{t=0} = (u_0\ ,\ u_1) \in \mathrm{H}^3_{loc} \times \mathrm{H}^2_{loc} \subset \mathrm{H}^1_{loc} \times \mathrm{L}^2_{loc} \end{cases} \tag{1.18}$$

D'aprés la proposition 1.1, puisque $F(u,v) = (v, f(u,v)) \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ l'équation (1.18) admet une solution unique telle que

$$Dw = (Du,\ Dv) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\ \mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)).$$

Puisque $\Box(Du) = Dv \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ on en déduit que $D^2u = D(Du) \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\|D^2u\|^2_{\mathrm{L}}(D(t,z_0)) \leq \|D^2u\|^2_{\mathrm{L}}(D(0,z_0)) + \|\ Dv\|_{\mathcal{C}^1([0,t],\ \mathrm{L}^2(D(t,z_0))}$.
D'où $D^2u \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, par le principe de Duhamel.
De plus $Dv \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$

Corollaire 1.3 *Lorsque $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ et $(u_0,u_1,u_2,u_3) \in \mathrm{H}^4_{loc} \times \mathrm{H}^3_{loc} \times \mathrm{H}^2_{loc} \times \mathrm{H}^1_{loc}$ le problème de Cauchy (1.1) admet une solution unique u telle que : $D^3u \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K)$ pour tout $K = K(z_0)$. D'où $u \in \mathcal{C}^3\mathrm{L}^2_{loc} \times \mathcal{C}^2\mathrm{H}^1_{loc} \times \mathcal{C}^1\mathrm{H}^2_{loc} \times \mathcal{C}^0\mathrm{H}^3_{loc}$.*

Preuve de corollaire 1.3. D'aprés le corollaire 1.1 la fonction $(w_0,w_1) = ((u_0,v_0),(u_1,v_1)) \in (\mathrm{H}^4_{loc} \times \mathrm{H}^2_{loc}) \times (\mathrm{H}^3_{loc} \times \mathrm{H}^1_{loc}) \subset (\mathrm{H}^2_{loc})^2 \times (\mathrm{H}^1_{loc})^2$. d'où $w = (u,v)$ est telle que : $D^2w = (D^2u, D^2v) \in (\mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K))^2$ pour tout $K = K(z_0)$. Puisque

$$\Box(D^2u) = D^2v \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2(K) \text{ pour tout } K_K(z_0),$$

c.à.d

$$\Box(D^2u) \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

on en déduit que

$$D^3u = D(D^2u) \in \mathcal{C}^0\mathrm{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|\ D^3u\ \|^2_{\mathrm{L}}\ (D(t,z_0)) \leq \|\ D^3u\ \|^2_{\mathrm{L}}\ (D(0,z_0)) + \|\ D^2v\ \|_{\mathcal{C}^1([0,t]\ ,\ \mathrm{L}^2(D(t,z_0))}\ .$$

1.5 Solution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ de (1.1) lorsque $n = 1$ ou $n = 2$

Le théorème 1.2 affirme que Lorsque $n = 1$ ou $n = 2$ et si $d^k f$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$
(à valeurs dans $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2), \forall\ k = 1, \cdots \infty)$ et $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in [\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)]^4$ alors le problème de Cauchy (1.1) admet une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ unique .

Preuve du théorème 1.2. La preuve est une conséquence immédiate du corollaire1.2.

Remarque 1.4 *Le linéarisé de* $\Box^2 u - f(u, \Box u)$ *est*

$$Pv = \Box^2 v - f'_v(u\ \ \Box u)\Box v + f'_u(u\ ,\ \Box u)v$$

P satisfait la condition de Levi comme dans [16], mais ici nous avons trouvé une solution régulière globale du problème de Cauchy (1.1).

Chapitre 2

Solutions globales régulières d'équations semi-linéaires d'évolution avec partie principale linéaire singulière

2.1 Introduction

Dans l'article " Non strictly Hyperbolic Non linear systems" Walter Craig étudie des systèmes $N \times N$ du second ordre non linéaires faisant intervenir des opérateurs pseudo-differentiels composés avec une fonction non linéaire ainsi qu'un exemple illustratif préliminaire où se trouve l'opérateur H de Hilbert .
L'auteur évoque aussi dans ce cadre des problèmes de la mécanique des milieux continus, les résultats sont locaux en temps .

Ici nous donnons des exemples d'opérateurs d'évolution semi-linéaires faisant intervenir des opérateurs singuliers $p(t, D_x)$ pour lesquels une perturbation quasi linéaire donne des équations admettant des solutions régulières globales.

2.2 Enoncés des résultats

Ils sont classés en deux parties.
Première partie Nous nous interessons d'abord aux opérateurs singuliers

$p(t, D_x)$. Nous obtenons plus précisément, le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Les opérateurs $p(t, D_x)$ tels que le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} Ly = \partial_{tt}^2 y - p(t, D_x)\, y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y_t(t=0) = g \end{cases} \tag{2.1}$$

admette une solution de la forme :

$$y = \frac{t}{w_n} \int_C g(x + tz)\, dz, \tag{2.2}$$

où C est une surface régulière compacte de $\mathbb{R}^n$ paramétrable en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^n$, sont singuliers et déterminés avec une valeur principale par

$$p(t, D_x)y = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ix\xi}\, p(t, \xi)\hat{y}(t, \xi)\, d\xi,$$

avec l'expression formelle

$$p(t, \xi) = \frac{\int_C e^{it(z.\xi)}\, (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2) dz}{t \int_C e^{it(z.\xi)}\, dz}.$$

Remarque 2.1 *L'opérateur $L = \partial_{tt}^2 - p(t, D_x)$ différentiel en t est respectivement d'ordre 2 en $t$et $p(t, D_x) = T(Qu)$ où $Q = Q(t, D_x)$ est pseudo-différentiel d'ordre 8 en x et T est une fonction linéaire (lorsque $n = 5$).*

De ce théorème on déduit les propositions suivantes :

Proposition 2.1 *Lorsque $C = S^{n-1}$, $p(t, \xi)$ peut s'écrire (formellement) :*

$$p(t, \xi) = -|\xi|^2 + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin\theta_1] \cos^n \theta_1\, d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin\theta_1]\, \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}\, |\xi|^2$$

$$- \frac{2}{t}\, \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[t|\xi| \sin\theta_1] \sin\theta_1 \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi| \sin\theta_1]\, \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}\, |\xi|.$$

Proposition 2.2 *Lorsque $C = S^{n-1}$, on a (formellement) :*

- *pour* $n = 1, \quad p(t,\xi) = - \mid \xi \mid^2 + 2 \dfrac{\mid \xi \mid \sin t \mid \xi \mid}{t \cos t \mid \xi \mid},$
- *pour* $n = 3, \quad p(t,\xi) = - \mid \xi \mid^2,$
- *pour* $n = 5, \quad p(t,\xi) = - \mid \xi \mid^2 + \dfrac{6}{t^2} + 2 \dfrac{\mid \xi \mid}{t} \dfrac{t \mid \xi \mid \sin t \mid \xi \mid}{t \mid \xi \mid \cos t \mid \xi \mid - \sin t \mid \xi \mid}.$

Remarques 2.1 1) *On peut calculer les valeurs de $p(t,\xi)$ pour tout n impair par récurrence sur n.*

2) *Lorsque n est pair, on ne peut pas calculer $p(t,\xi)$ par les fonctions élémentaires .*

3) *Cependant, par la méthode de descente, pour les mêmes valeurs de $p(t,\xi)$ calculables à partir de la proposition 2.1 dans le cas général avec les fonctions élémentaires avec $n = 2m+1$, on obtient, lorsque $n = 2m$, la résolution du problème :*

$$\begin{array}{l} Ly = \partial_{tt}^2 y - p(t, D_x)\, y = 0 \\ y(t=0) = 0, \quad y_t(t=0) = g \end{array}$$

sous la forme :

$$y = \frac{t}{w_n} \int_{B^{n-1}=\{z\in\mathbb{R}^{n-1}, |z|\leq 1\}} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1- \mid z \mid^2}}\, dz \tag{2.3}$$

4) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (pair ou impair) , on peut montrer que :*

$$p(t,\xi) \to_{t\to 0} \; -\frac{3}{n}\, |\xi|^2,$$

et

$$p(t,\xi) \to_{t\to +\infty} \; -|\xi|^2.$$

Nous donnons ensuite un sens aux opérateurs singuliers $L = \partial_{tt}^2 - p(t, D_x)$ lorsque $n = 5$, dans les deux propositions suivantes :

Proposition 2.3 *L'opérateur L défini pour tout $t > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n=5}))$ par l'expression ; ($\wedge$ étant l'opérateur pseudo-différentiel de* *symbole $|\xi|$)*

$$\begin{aligned}
Lu &= \Box u - Nu = \Box u - (\ \frac{6}{t^2}\ u - Mu) \\
&= \Box u - \frac{6}{t^2}\ u - 2\frac{\wedge}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} v.p \int_{\mathbb{R}^5} \frac{e^{ix.\xi} t|\xi| \sin\ t|\xi|}{t|\xi| \cos\ t|\xi| - \sin\ t|\xi|} \widehat{u}(\xi)\ d\xi \\
&= \Box u - \frac{6}{t^2}\ u - 2\frac{\wedge}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\complement \cup_{k=1}^{+\infty}]\lambda_{k-\epsilon}, \lambda_{k+\epsilon}[} \frac{e^{ix.\xi} t|\xi| \sin t|\xi|}{t|\xi| \cos t|\xi| - \sin t|\xi|} \widehat{u}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

existe, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
Lu = \quad & \Box u - \Bigg(\frac{6}{t^2} u + (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4(0,1)} dw\ \times \int_0^{+\infty} \{log|t\rho \cos t\rho - \sin t\rho|\} \frac{d}{d\rho} \\
& \left[\frac{2\rho^2}{t^2(1+\rho)^5} \ \int_{\mathbb{R}_y^5} e^{i||x-y||\rho \sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5 \Delta^{\frac{3}{2}} u(t,y) dy \right] d\rho \Bigg)
\end{aligned}$$

et vérifie :

$$L\left(\frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x+tz)\ dz \right) = 0 \quad (n=5) \quad \textit{pour tout } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$$

Proposition 2.4 *N s'étend en un opérateur linéaire, singulier continu sur $W^{8,1}$ à valeur dans $\mathcal{L}^r$, $\forall\ r > n = 5$ et défini par :*

$$N = T[(1+\wedge)^5 \Delta^{2-\frac{1}{2}} u]$$

où T est l'opérateur linéaire continu :

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^5) \longrightarrow \int(\mathbb{R}^5)$$

$$\varphi \longmapsto \chi * \varphi$$

avec

$$\begin{aligned}
\chi = \frac{-20\pi^2}{t} \sum_{p=1}^{\infty} \ \frac{t^5}{(\lambda_p + t)^5} & \left[\frac{1}{||x||} - \frac{2\sin||x||\rho_p}{||x||^2\rho_p} - \frac{2\cos||x||\rho_p - 1}{||x||^3\rho_p^2} \right] \\
& - 2\int_0^{\infty} \left[\frac{6}{t^2} - 2\sigma \frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t - sh\sigma t} \right] \frac{5\sigma^4 - 10\sigma^2 + 1}{(\sigma^2+1)^5} \\
& \times \left[\frac{1}{||x||} + \frac{2e^{-||x||\sigma}}{||x||^2\sigma} + \frac{2e^{-||x||\sigma} - 1}{||x||^3\sigma^2} \right] d\sigma
\end{aligned}$$

Deuxième partie Dans cette partie nous obtenons pour $n = 5$ essentiellement un résultat régulier global dans le cas d'une perturbation semi-linéaire de l'équation (2.1) sous la forme du théorème suivant :

Théorème 2.2 *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Ly = \Box y - N(t, D_x)y = f(D_y) \\ y/_{t=0} = 0 \quad , y_t/_{t=0} = g \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f \in C^\infty$ *et* $f(0) = df(0) = 0, d^2f(0) \neq 0$.
$N(t, D_x)$ *est un opérateur singulier défini par :*

$$N(t, D_x)u = \frac{6}{t^2}\, u + \frac{2}{t}(2\pi)^{-\frac{5}{2}} v.p \int_{\mathbb{R}^5} \frac{e^{ix.\xi}|\xi| \sin\ t|\xi|}{\cos\ t|\xi| - \frac{\sin\ t|\xi|}{t|\xi|}} \widehat{u}(\xi)\, d\xi$$

Alors il existe un entier $s_0 > \frac{n}{2} + 1$ *et* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $s \geq s_0$ *l'on ait la propriété suivante : Si* $u_0 = (g, 0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^5)$ *et* $||u_0||_{s,2} + ||u_0||_{s,p} < \delta$ *avec* $p = \frac{4}{3}$, *alors il existe une solution y du problème de Cauchy non linéaire précédent avec*

$$Dy = (y_t, \nabla_x y) \in C^0([0, \infty), W^{s,2}) \cap C^1([0, \infty), W^{s-1,2}).$$

De plus on a :

$$||Dy(t)||_\infty + ||Dy(t)||_4 \leq c\ (t^{-\frac{1}{2}})$$

$$||Dy(t)||_{s,2} = \mathcal{O}(1) \quad \textit{lorsque}\ \ t \to +\infty \quad (n = 5).$$

Ces théorèmes et propositions se démontrent à l'aide de propositions et lemmes intermédiaires enoncés et demontrés dans les paragraphes suivants. Nous expliquons les opérateurs singuliers utilisés et nous calculons $p(t, \xi)$ dans le cas impair.
Nous étudions ensuite l'existence de l'opérateur L lorsque $n = 5$ et nous établissons l'existence locale puis globale de l'équation non linéaire.

2.3 Les opérateurs singuliers $p(t, D_x)$ utilisés

Pour la démonstration du théorème 2.1 on a besoin de la remarque suivante :

Remarque 2.2 *: C est une surface régulière compacte de $\mathbb{R}^n$ paramétrable en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 & = r\cos\theta_1\ \cos\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}\ \cos\theta_{n-1} \\ x_2 & = r\cos\theta_1\ \cos\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}\ \sin\theta_{n-1} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} & = r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_n & = r\sin\theta_1 \\ Avec & r=\rho(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\geq 0\ \ ,\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \theta_{n-1}\in[0,2\pi] \end{array}\right. \tag{2.5}$$

où

$$\rho:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^{n-2}\times[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^+$$

est une fonction à valeurs strictement positives, périodique de période π par rapport à $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}$ et périodique de période 2π par rapport à θ_{n-1}, avec $w_n=$ aire de C.
$dx_1\cdots dx_n = r^{n-1}\ \cos^{n-2}\theta_1\ \cos^{n-3}\theta_2\ \cdots\cos\theta_{n-2}dr\ d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}$

Preuve du théorème 2.1 On a :

$$y=\frac{t}{w_n}\int_{C^{n-1}} g(x+tz)\ dz$$

D'où

$$\begin{aligned}\widehat{y}(t,\xi) &= \frac{t}{w_n}\int_C\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x.\xi)}\ g(x+tz)\ dx\right)dz \\ &= \frac{t}{w_n}\int_C\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x+tz).\xi+itz.\xi}\ g(x+tz)\ d(x+tz)\right)dz \\ &= \frac{t}{w_n}\left(\int_C e^{it(z.\xi)}\ dz\right)\widehat{g}(\xi)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p(t,D_x)y=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x.\xi)}\ p(t,\xi)\ \frac{t}{w_n}\left(\int_C e^{it(z.\xi)}\ \ dz\right)\widehat{g}(\xi)\ d\xi\right).$$

D'autre part on a :

$$y(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\widehat{y}(t,\xi)\, d\xi$$
$$y(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \frac{t}{w_n}\, (\int_C e^{itz.\xi}\, dz)\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi.$$
$$y_t(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\frac{1}{w_n}\, [\int_C e^{itz.\xi}\, (1+itz.\xi)\, dz]\widehat{g}(\xi)\, d\xi$$
$$y_{tt}(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\frac{1}{w_n}\, [\int_C e^{itz.\xi}\, (2iz.\xi - t(z.\xi)^2)\, dz]\widehat{g}(\xi)\, d\xi.$$

L'équation (3.1) s'écrit donc :

$$0 = (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\frac{1}{w_n} \int_C e^{itz.\xi}\, (2iz.\xi - t[(z.\xi)^2 + p(t,\xi)\,])\, dz\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi.$$

pour tout g, qui équivaut à :

$$\int_C e^{itz.\xi}\, (2iz.\xi - t[(z.\xi)^2 + p(t,\xi)\,])\, dz = 0.$$

Preuve de la proposition 2.1 : On a d'aprés le théorème 2.1 :

$$\forall n,\ \ \forall c,\ \ p(t,\xi) = \frac{\int_C e^{it(z.\xi)}\, (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2)\, dz}{t\int_C e^{it(z.\xi)}\, dz}.$$

Lorsque $C = S^{n-1}(0,1)$, on peut prendre $(z.\xi) = \rho|\xi|\sin\theta_1$ en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n_\xi$.
Ici $\rho = 1$ *et* $dz = \cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\ \ d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}$, avec $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *et* $\theta_{n-1} \in [0,2\pi]$.
D'où, après simplification,

$$p(t,\xi) = \frac{1}{t}\left\{\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it|\xi|\sin\theta_1}\, (2i|\xi|\sin\theta_1 - t|\xi|^2\sin^2\theta_1)\, \cos^{n-2}\theta_1\, d\theta_1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it|\xi|\sin\theta_1}\, \cos^{n-2}\theta_1\, d\theta_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{t}\left\{\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos[t|\xi|\sin\theta_1] + i\sin[t|\xi|\sin\theta_1]\ )\ (2i|\xi|\sin\theta_1 - t|\xi|^2\sin^2\theta_1)\cos^{n-2}\theta_1\, d\theta_1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\, (\cos[t|\xi|\sin\theta_1] + i\sin[t|\xi|\sin\theta_1])\cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}\right\}.$$

Comme les intégrales de produit simple impair par rapport à θ sont nulles,

$$p(t,\xi) = \frac{1}{t}\left\{ \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -t|\xi|^2 \sin^2\theta_1 \cos[t|\xi|\sin\theta_1] \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos[t|\xi|\sin\theta_1] \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1} \right.$$

$$\left. + \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2i|\xi| i \sin\theta_1 \sin[t|\xi|\sin\theta_1] \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos[t|\xi|\sin\theta_1] \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1} \right\}.$$

Ce qui donne :

$$p(t,\xi) = -|\xi|^2 + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1] \cos^n\theta_1 \ d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1] \ \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1} \ |\xi|^2$$

$$- \frac{2}{t} \ \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[t|\xi|\sin\theta_1] \sin\theta_1 \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[t|\xi|\sin\theta_1] \ \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1} \ |\xi|.$$

2.4 Calcul de $p(t,\xi)$ dans le cas impair

Ici on va démontrer la proposition 2.2 dans la quelle on a
calculé $p(t,\xi)$ pour n impair en étudiant les cas $n = 1, \ 3$ et 5 lorsque $C = S^{n-1}(0,1)$.

Remarque 2.3 *: On a l'égalité :*

$$p(t,\xi) = \frac{1}{t^2} \ p(1,t\xi)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \forall\lambda > 0, p(\frac{1}{\lambda} \ t, \lambda\xi) &= \frac{\int_C \ e^{it(z.\xi)} \ (\lambda 2i(z.\xi) - \lambda(z.\xi)^2) \ dz}{\int_C \ e^{itz.\xi} \ dz} \\ &= \frac{\int_C \ e^{it(z.\xi)} \ (2i(z.\xi) - (z.\xi)^2) \ dz}{\int_C \ e^{itz.\xi} \ dz} \\ &= \lambda^2 \ p(t,\xi) \end{aligned}$$

On a le résultat , en prenant $\lambda = t$

Preuve de la proposition 2.2

Cas $n = 1$:
$C = S = \{-1, 1\}$

$$p(1,\xi) = \frac{e^{i|\xi|}(2i|\xi| - |\xi|^2) + e^{-i|\xi|}(-2i|\xi| - |\xi|^2)}{e^{i|\xi|} + e^{-i|\xi|}}$$
$$= -|\xi|^2 + \frac{2|\xi|\sin|\xi|}{\cos|\xi|}$$

Donc, $p(t,\xi) = -|\xi|^2 + 2\frac{t|\xi|\sin t|\xi|}{t^2\cos t|\xi|}$

Cas $n = 3$:

Pour $n = 3$, $C = S^2(0,1)$, $p(t,\xi) = -|\xi|^2$; on peut prendre ξ dans la direction du demi-axe positif de z_3 où $z = (z_1, z_2, z_3)$ car S est la sphère du dimension deux, $S = S^2(0,1) \subset \mathbb{R}^3$. Or

$$p(1,\xi) = \frac{\int_S \; e^{iz.\xi}(2iz.\xi - (z.\xi)^2)\; dz}{\int_S e^{iz\xi}\; dz}$$

donc

$$p(1,\xi) = \frac{\int_S \; e^{iz_3.|\xi|}(2i|\xi|z_3 - z_3^2|\xi|^2)\; dz}{\int_S e^{i|\xi|z_3}\; dz}$$

on a :

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\theta_1\; \cos\theta_2 \\ z_2 &= \cos\theta_1\; \sin\theta_2 \\ z_3 &= \sin\theta_1 \qquad \text{avec}\;\; \theta_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\;\; \theta_2 \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

$dz = \cos\theta_1\; d\theta_1\; d\theta_2$, $\;z.\xi = |\xi|\sin\theta_1$.

ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(1,\xi) \quad &= \quad \frac{\int_0^{2\pi}\; d\theta_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\; e^{i|\xi|\sin\theta_1}\cos\theta_1\; (2i|\xi|\sin\theta_1 - |\xi|^2\sin^2\theta_1)\; d\theta_1}{\int_0^{2\pi}\; d\theta_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\; e^{i|\xi|\sin\theta_1}\cos\theta_1\; d\theta_1} \\ &\overbrace{=}^{u=\sin\theta_1} \quad \frac{\int_{-1}^{1}\; e^{i|\xi|u}(2i|\xi|u - |\xi|^2u^2)\; du}{\int_{-1}^{1}\; e^{i|\xi|u}\; du} = \frac{N}{D} \end{aligned}$$

Par intégration par partie on obtient :

$$D = \frac{2\sin|\xi|}{|\xi|}, \qquad N = -2|\xi|\sin|\xi|$$

$p(1,\xi) = -|\xi|^2$ étant homogène de dégré deux on a :
$p(1,\xi) = -|\xi|^2 = p(t,\xi)$ (indépendant de t).

Cas $n = 5$:

$$p(1,\xi) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta_4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i|\xi|\sin\theta_1}(2i|\xi|\sin\theta_1 - |\xi|^2\sin^2\theta_1)\cos^3\theta_1\, d\theta_1}{\int_0^{2\pi} d\theta_4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i|\xi|\sin\theta_1}\cos^3\theta_1\, d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_2\, d\theta_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_3\, d\theta_3}$$

$$\times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_2\, d\theta_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_3 d\theta_3$$

on pose $u = \sin\theta_1$, on a :

$$\begin{aligned} p(1,\xi) = \frac{N}{D} &= \frac{\int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}(2i|\xi|u - |\xi|^2u^2)(1-u^2)\, du}{\int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}(1-u^2)\, du} \\ &= \frac{\int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}(2i|\xi|u - |\xi|^2u^2 - 2i|\xi|u^3 - |\xi|^2u^4)\, du}{\int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, du - \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}u^2\, du} \\ &= \frac{|\xi|^2 I_0 + 2i|\xi| I_1 - 2|\xi|^2 I_2 - 2i|\xi| I_3 + |\xi|^2 I_4}{I_0 - I_2} \end{aligned}$$

Avec

$$I_0 = \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, du = \frac{2\sin|\xi|}{|\xi|}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, u\, du = \frac{2\cos|\xi|}{i|\xi|} + \frac{2i\sin|\xi|}{|\xi|^2}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, u^2\, du = \frac{2\sin|\xi|}{|\xi|} + \frac{4\cos|\xi|}{|\xi|^2} - \frac{4\sin|\xi|}{|\xi|^3}.$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, u^3\, du = -\frac{2i\cos|\xi|}{|\xi|} + \frac{6i\sin|\xi|}{|\xi|^2} + \frac{12i\cos|\xi|}{|\xi|^3} - \frac{12i\sin|\xi|}{|\xi|^4}$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} e^{i|\xi|u}\, u^4\, du = \frac{2\sin|\xi|}{|\xi|} + \frac{8\cos|\xi|}{|\xi|^2} - \frac{24\sin|\xi|}{|\xi|^3} - \frac{48\cos|\xi|}{|\xi|^4} + \frac{48\sin|\xi|}{|\xi|^5}$$

$$p(1,\xi) = -|\xi|^2 + 6 + 2\,|\xi| \left\{ \frac{\sin|\xi|}{\cos|\xi| - \frac{\sin|\xi|}{\xi}} \right\}.$$

Donc ,

$$p(t,\xi) = - \mid \xi \mid^2 + \frac{6}{t^2} + 2\frac{\mid \xi \mid}{t} \quad \frac{t \mid \xi \mid \sin t \mid \xi \mid}{t \mid \xi \mid \cos t \mid \xi \mid - \sin t \mid \xi \mid}$$

Cette expression est formelle. Sa signification se fera dans les paragraphes 2.5 et suivants en remarquant que le numérateur $-\rho \sin \rho$ est la dérivée du dénominateur $\rho \cos \rho - \sin \rho$ (cf [12]).

2.5 Existence de l'opérateur $L = \partial_{tt}^2 - p(t, D_x)$ lorsque $n = 5$

Preuve de la proposition 2.3 Pour la preuve, on va utiliser les deux lemmes suivantes :

Lemme 2.1 *pour tout* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n=5}))$ *l'intégrale :*

$$H(t,x) = \int_0^{+\infty} \{log|t\rho \cos t\rho - \sin t\rho|\} \frac{d}{d\rho}\Bigg[\frac{2\rho^2}{t^2(1+\rho)^5}$$

$$\int_{\mathbb{R}^5_y} e^{i||x-y||\rho \sin\theta_1} (1+\wedge)^5 \wedge^3 u(t,y) dy \Bigg] d\rho$$

est absolument convergente au voisinage des zéro ρ_k *de la fonction* $t\rho \cos t\rho - \sin t\rho$ *en* ρ $(k = 0, \cdots, \infty)$ *et au voisinage de l'infini en* ρ *.*

Preuve. En effet au voisinage de $\lambda_k = t\rho_k$ on a d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} &\lambda \cos \lambda - \sin \lambda = \lambda \cos \lambda - \sin \lambda - (\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k) \\ &= (\lambda - \lambda_k) \int_0^1 \{- [\ \lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k)\ ]\ \sin(\lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k)\ ]\ \}\ d\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

puisque

$$\frac{d}{d\lambda}\ (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) = -\lambda\ \sin \lambda$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2}\ (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) &= -\lambda \cos \lambda - \sin \lambda, \quad d'o`u \\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\ (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda)_{/\lambda=\lambda_k} &= -(\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k) - 2 \sin \lambda_k \\ &= -2 \sin \lambda_k \end{aligned}$$

pour tout $k = 0, \cdots, \infty$ avec $\lambda_k \in [\ k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\ [\ \subset\ ]\ -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\ [$.
De plus

$$\begin{array}{cc} \text{si k pair} & \dfrac{d^2}{d\lambda^2}\,(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda)_{/\lambda_k} < 0 \\ et & \\ \text{si k impair} & \dfrac{d^2}{d\lambda^2}\,(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda)_{/\lambda_k} > 0 \end{array}$$

Donc si k impair $(k = 1, 3, \cdots)$, $\exists\, \epsilon > 0$ *tel que* $\forall\, \lambda \in]\lambda_k, \lambda_k + \epsilon[$ on ait

$$\log(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda) = \log(\lambda - \lambda_k) + \underbrace{\log\int_0^1 -[\lambda_k + \theta(\lambda-\lambda_k)]\sin[\lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k)]d\theta}_{\text{quantité finie positive au voisinage de } log(\frac{\pi}{2}+k\pi)>0 \text{ car } \lambda_k \sim_{k\to\infty} \frac{\pi}{2}+k\pi}$$

donc

$$\log(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda) \sim_{\lambda\to\lambda_k} \log(\lambda - \lambda_k)$$

D'où

$$\forall\, \alpha \in]0,1[,\ \ \exists\, c_\alpha > 0\ \ tel\ que\ \ \forall\, \lambda \in]\lambda_k, \lambda_k + \epsilon[$$

$$0 < \log(\lambda - \lambda_k) < \frac{c_\alpha}{(\lambda - \lambda_k)^\alpha} \Longrightarrow 0 < |\log(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda)| < \frac{c_\alpha}{(\lambda - \lambda_k)^\alpha}$$

Pour $\lambda \in]\lambda_k - \epsilon, \lambda_k[$, on multiplie (2.6) par -1 on obtient

$$\log|\lambda\cos\lambda - \sin\lambda| = \log|\lambda - \lambda_k| + \log\int_0^1 [-(\lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k))]\ \sin(\lambda_k + \theta(\lambda-\lambda_k))\ d\theta$$

et pour $\forall\ \ \alpha \in]0,1[,\quad \exists\, c_\alpha > 0, \text{tel que } \forall\, \lambda \in]\lambda_k - \epsilon, \lambda + \epsilon[,$ *on ait*

$$0 < |\log|\lambda\cos\lambda - \sin\lambda|| < \frac{c_\alpha}{(\lambda - \lambda_k)^\alpha}$$

Si k pair, on a d'après (2.6)

$$\begin{aligned} &|\lambda\cos\lambda - \sin\lambda| = \\ &|\lambda - \lambda_k|\ [\int_0^1 [-(\lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k))\ \ \sin(\lambda_k + \theta(\lambda - \lambda_k))]dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

on prend le log des deux membres et on a encore d'après ce qui précède le même résultat.

D'où la convergence absolue de $H(t,x)$ au voisinage de chaque $\rho_k = \frac{\lambda_k}{t} \in]0,\infty[$.
Il y a aussi convergence de l'intégrale $H(t,x)$ au voisinage de 0 (limite finie de la fonction à intégrer lorsque ρ tend vers 0) et au voisinage de l'infinie en ρ car lorsque ρ tend vers $+\infty$ on a :

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho^2}{(1+\rho)^5}\times\beta(\rho)\right] = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^5}\,\beta'(\rho) + \beta(\rho)\left[\frac{2\rho}{(1+\rho)^5} + \frac{-5\rho^2}{(1+\rho)^6}\right]$$

D'où l'existence de

$$Mu = (2\pi)^{-5}\int_{S^4_w} H(t,x,w)\,dw,\ \forall\, u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n=5}))$$

Lemme 2.2 *On a l'égalité suivante :*

$$H = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement_{[0,+\infty[}\cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})} [\ log\mid t\rho\cos t\rho - \sin t\rho \mid\ ]\times$$
$$\frac{d}{d\rho}\Big[\ \frac{2\rho^2}{t^2(1+\rho)^5}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\,dy\ \Big]\,d\rho$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement_{[0,+\infty[}\cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^3(1+\rho)^5}\ \frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)}\times$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\,dy\ ]\,d\rho$$

Preuve. Intégrons par parties :

$$K_\epsilon = \int_{\complement_{[0,+\infty[}\cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^3(1+\rho)^5}\ \frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n=5}} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\,dy\ ]\,d\rho$$
$$= \int_{\complement_{[0,+\infty[}\cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})} [\ log(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)\ ]\times$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{2\rho^2}{t^2(1+\rho)^5}\int_{\mathbb{R}^{n=5}} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\,dy\right]d\rho$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\ \Bigg[\ \underbrace{\Big\{(\log\ |\ (t\rho_k-\epsilon)\ \cos(t\rho_k-\epsilon)-\sin(t\rho_k-\epsilon)\ |)}_{A_{k,\epsilon}}\ \times$$

$$\underbrace{(\frac{2(\rho_k-\frac{\epsilon}{t})}{t^2(1+\rho_k-\frac{\epsilon}{t})^5}\ \int_{\mathbb{R}^{n=5}}\ e^{i||x-y||(\rho_k-\frac{\epsilon}{t})\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\ dy\ )\ \Big\}}_{B_{k,\epsilon}}$$

$$-\ \Big\{\ \underbrace{(\ \ |(\log\ |\ (t\rho_k+\epsilon)\ \cos(t\rho_k+\epsilon)-\sin(t\rho_k+\epsilon)\ |\ \ )}_{C_{k,\epsilon}}\ \times$$

$$\times\ \underbrace{(\frac{2(\rho_k+\frac{\epsilon}{t})^2}{t^2(1+\rho_k+\frac{\epsilon}{t})^5}\ \int_{\mathbb{R}^{n=5}}\ e^{i||x-y||(\rho_k+\frac{\epsilon}{t})\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\ dy\ )\ \Big\}}_{D_{k,\epsilon}}\ \ \Bigg]$$

et en passant à la limite lorsque ϵ tend vers 0, on obtient le résultat du lemme 2.2 car $\lim_{\epsilon\to 0}\ \sum_{k=1}^{\infty}\ (\ A_{k,\epsilon}\ B_{k,\epsilon}-C_{k,\epsilon}\ D_{k,\epsilon}\ )=0$ puisque

$$\begin{aligned} A_{k,\epsilon}\ B_{k,\epsilon}-C_{k,\epsilon}\ D_{k,\epsilon}\ &= A_{k,\epsilon}\ B_{k,\epsilon}-A_{k,\epsilon}\ D_{k,\epsilon}\ +A_{k,\epsilon}\ D_{k,\epsilon}-C_{k,\epsilon}\ D_{k,\epsilon} \\ &= A_{k,\epsilon}\ (\ B_{k,\epsilon}-D_{k,\epsilon}\ )+(\ A_{k,\epsilon}-C_{k,\epsilon}\ )\ D_{k,\epsilon} \end{aligned}$$

tend vers 0 quant ϵ tend vers 0 ($\lim_{\epsilon\to 0}\ (\ B_{k,\epsilon}-D_{k,\epsilon}\ )=\lim_{\epsilon\to 0}\ (\ A_{k,\epsilon}-C_{k,\epsilon}\ )=0$). D'où le lemme 2.2 .
On considère maintenant

$$Mu=(2\pi)^{-5}\ \int_{S_w^4}\ \lim_{\epsilon\to 0}\ \int_{\complement_{[0,+\infty[}\ \cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{t}{\epsilon})}\ \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^3(1+\rho)^5}\ \frac{-t^2\rho sint\rho}{(t\rho cost\rho-sint\rho)}\ \times$$

$$\Bigg[\ \int_{\mathbb{R}^{n=5}}\ e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\ \wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\ dy\Bigg]\ d\rho\ dw$$

avec le théorème de Lebesgue d'intervertion de $\int$ et lim on a

$$Mu=(2\pi)^{-5}\ \lim_{\epsilon\to 0}\ \int_{S_w^4}\ \int_{\complement_{[0,+\infty[}\ \cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})}\ \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^3(1+\rho)^5}\ \frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho-\sin t\rho)}\ \times$$

$$\Bigg[\ \int_{\mathbb{R}^{n=5}}\ e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\ \wedge)^5\wedge^3 u(t,y)\ dy\Bigg]\ d\rho\ dw$$

et en appliquant le théorème de Fubini d'intervertion des intégrations par rapport à dy de $\int_{\mathbb{R}^{n=5}}$ et par rapport à $d\rho\ dw$dans $\int_{S_w^4}\ dw\ \int_{\complement_{[0,+\infty[}\ \cup_{k=1}^{+\infty}B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})}\ \cdots\ d\rho$ on a

$$Mu=(2\pi)^{-5}\ \lim_{\epsilon\to 0}\ \int_{\mathbb{R}^{n=5}}(1+\ \wedge)^5\wedge^3 u(t,y)$$

$$\underbrace{\left(\int_{S_w^4} dw \int_{\complement_{[0,+\infty[\cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k,\frac{\epsilon}{t})}} \frac{-2\rho\rho^4}{t^2\rho^3(1+\rho)^5}\frac{-t^2\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho-\sin t\rho)} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1} d\rho\right) dy,}_{(=\int_{\complement\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} \frac{2|\xi|t}{t^2|\xi|^3(1+|\xi|)^5}\frac{t|\xi|\sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi|-\sin t|\xi|} d\xi)}$$

avec $x-y$ dans la direction de l'axe des pôles de S_w^4 dans $\mathbb{R}_\xi^5$ tel que $i(x-y).\xi$ ait une partie réelle négative.Sans restriction sur $x-y$ d'aprés la symétrie du problème.

$$Mu = (2\pi)^{-5} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}_y^{n=5}} (1+\ \wedge)^5 \wedge^3 u(t,y)$$

$$\left[\int_{\complement\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} \frac{2|\xi|t}{t^2|\xi|^3(1+|\xi|)^5}\frac{t|\xi|\ \sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi|-\sin t|\xi|}\ d\xi\right] dy,$$

en appliquant l'intervertion des intégrations par rapport à $d\rho\ dw$ dans $\int_{S_\xi^4} dw$ $\int_{\complement\cup_{k=1}^{+\infty} B(\rho_k,\frac{t}{\epsilon})} \cdots d\rho$ et par rapport à dy dans $\int_{\mathbb{R}_y^{n=5}} \cdots dy$, dans l'autre sens toujours en vertu du théorème de Fubini, on a

$$Mu = (2\pi)^{-5}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement_{\mathbb{R}_\xi^{n=5}}\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} e^{ix.\xi}\frac{2t|\xi|}{t^2|\xi|^3(1+|\xi|)^5}\frac{t|\xi|sint|\xi|}{t|\xi|cost|\xi|-sint|\xi|}$$

$$\left[\int_{\mathbb{R}_y^{n=5}} e^{-iy.\xi}\ (1+\ \wedge)^5 \wedge^3 u(t,y)\ dy\right] d\xi.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}_y^{n=5}} e^{-iy.\xi}\ (1+\ \wedge)^5 \wedge^3 u(t,y)\ dy = (2\pi)^{\frac{5}{2}}\ (1+|\xi|)^5\ |\xi|^3\ \widehat{u}(t,\xi).$$

Donc

$$Mu = (2\pi)^{\frac{-5}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement_{\mathbb{R}_\xi^{n=5}}\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} e^{ix.\xi}\frac{2|\xi|t}{t^2}\frac{t|\xi|\sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi|-\sin t|\xi|}\widehat{u}(t,\xi)d\xi$$

$$= \frac{2\wedge}{t}\ (2\pi)^{\frac{-5}{2}}\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\complement\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} e^{ix.\xi}\ \frac{t|\xi|\ \sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi|-\sin t|\xi|}\ \widehat{u}(t,\xi)\ d\xi.$$

Par suite

$$L\left(\frac{t}{w_n}\int_{S^{n-1}} g(x+tz)\ dz\right) = (2\pi)^{\frac{-5}{2}}\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}_\xi^{n=5}\setminus\cup_{k=1}^{+\infty}\{\rho_k-\frac{\epsilon}{t}\leq|\epsilon|\leq\rho_k+\frac{\epsilon}{t}\}} e^{ix.\xi}\frac{1}{w_n}$$

$$\int_{S_z^{n-1}} \left[2iz.\xi - t(z.\xi)^2 + t\left(|\xi|^2 - \frac{6}{t^2} - \frac{2|\xi|}{t} \times \frac{t|\xi|\sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi| - \sin t|\xi|}\right)\right] dz\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi = 0,$$

puisque

$$\int_{S_z^4} e^{i(z.\xi)}\ [\ 2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2 + t\{\ |\xi|^2 - \frac{6}{t^2} - \frac{2\ |\xi|}{t} \times \frac{t|\xi|\ \sin t|\xi|}{t|\xi|\cos t|\xi| - \sin t|\xi|}\ \}\ ]dz = 0,$$

pour $\forall\ \xi, \forall t > 0$ par constuction (cf paragraphe 2.4) . La proposition 2.3 est donc prouvée.

$*$ On remarque que pour $t = 0$, On a $p(0, D_x) = \frac{3}{5}\ \Delta$ donc $L(0, D_{t,x}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{3}{5}\ \Delta$

2.6 Inégalités du type Strichartz et extension de L

On a $\forall\ t > 0$

$$Lu = \Box u - (\frac{6}{t^2} u - Mu) = \Box u - Nu$$

avec (d'aprés le lemme 2.2)

$$Nu = \frac{6}{t^2}\ u + (2\pi)^{-5} \int_{S_w^4(0,1)} dw\ \int_0^{+\infty} \left[\frac{2\rho^2 t}{t^2(1+\rho)^5}\ \ \frac{t\rho\sin t\rho}{t\rho\cos t\rho - \sin t\rho}\right.$$

$$\left. \times \int_{\mathbb{R}_y^5} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ (1+\wedge)^5 \Delta^{2-\frac{1}{2}} u(t,y)\ dy\ \right] d\rho$$

$$= (2\pi)^{-5} \int_{\mathbb{R}_y^5} (1+\wedge)^5 \Delta^{2-\frac{1}{2}}\ u(t,y)\ dy$$

$$\times \left[\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta_1 d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_2\ \cos\theta_3\ d\theta_2\ d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\theta_4\right.\right.$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\theta_1 \; d\theta_1 \;\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_2 \;\cos\theta_3 \; d\theta_2 \; d\theta_3 \int_0^{2\pi} \; d\theta_4\Big)$$

$$\times\left(\int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1} \; (\frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2} \; \frac{t\;\rho\;\sin t\rho}{t\;\rho\;\cos t\rho-\sin t\rho}) \; \frac{1}{\rho^3} \; \frac{1}{(1+\rho)^5} \; \rho^4 \; d\rho\right)\Bigg].$$

Or

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_2 \;\cos\theta_3 \; d\theta_2 \; d\theta_3 \int_0^{2\pi} \; d\theta_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta_2 \;+1}{2} \; d\theta_2 = 2\pi^2.$$

Donc

$$Nu = \frac{1}{16\pi^3}\int_{\mathbb{R}^5_y} (1+\wedge)^5 \Delta^{2-\frac{1}{2}} u(t,y) \; dy \times \Big[\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta_1 \; d\theta_1 \; + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\theta_1 \; d\theta_1 \; \Big]$$

$$\times\left\{\int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1} \left(\frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2} \; \frac{t\;\rho\;\sin t\rho}{t\;\rho\;\cos t\rho-\sin t\rho}\right) \frac{\rho}{(1+\rho)^5} \; d\rho\right\}. \tag{2.8}$$

Notons

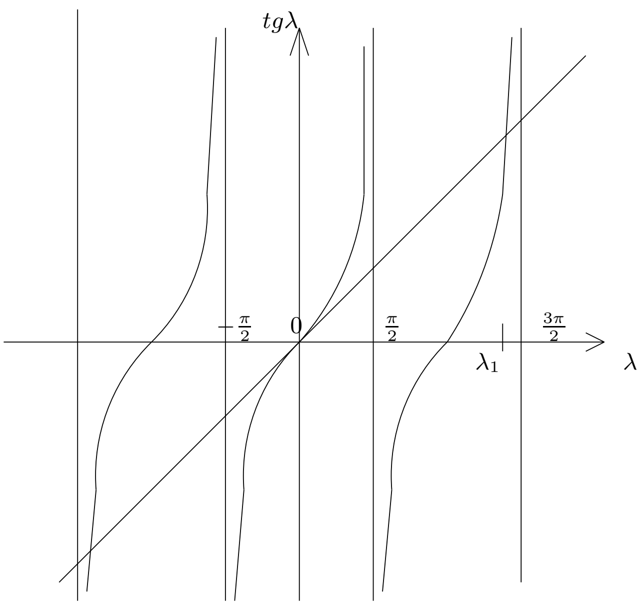
$$I = \int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1} \; \frac{\rho}{(1+\rho)^5} \; [\; \frac{6}{t^2}+\frac{2\rho t}{t^2} \; \frac{t\;\rho\;\sin t\rho}{t\;\rho\;\cos t\rho-\sin t\rho} \;] \; d\rho,$$

et effectuons un calcul de résidus sur I : On a

Si, ρ tend vers 0, alors $\dfrac{\rho}{(1+\rho)^5}\left[\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{2\rho t}{t^2}\dfrac{t\rho\sin t\rho}{t\rho\cos t\rho-\sin t\rho}\right]$ tend vers $-\dfrac{3}{t}$

Si, ρ tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\rho}{(1+\rho)^5}\left[\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{2\rho t}{t^2} \; \dfrac{t\;\rho\;\sin t\rho}{t\;\rho\;\cos t\rho-\sin t\rho}\right]$ tend vers 0

donc I est semi convergente (cf H.Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieures variables complexes) .
Selon que $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ on notera : $I = I_1$ ou I_2 .
Appelons λ_k les solutions réelles de l'équation $\lambda \;\cos\lambda - \sin\lambda = 0$
D'aprés le lemme de l'appendice, les seules solutions complexes de cette equation sont réelles et forme une suite croissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $\lambda_{-k} = -\lambda_k, \; \lambda_k \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[\; (\forall k \in \mathbb{Z}), \lambda_k - k\pi$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque k tend vers $+\infty$, d'aprės le graphe :
On a : $\lambda_k = t\rho_k$, en notant ρ_k la solution correspondante de l'équation de $t\rho \; cost\rho - sint\rho = 0$ d'inconnue ρ.
Les résultats des calculs de résidus sont donnés par les deux lemmes et les deux contours suivants :



Lemme 2.3 *Pour* $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ *et* $t > 0$, *on a*

$$I_1 = -\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\frac{\frac{\mu}{t}}{(i\frac{\mu}{t}+1)^5}\left[\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{\mu\ ch\mu - sh\mu}\right]\ d\mu$$

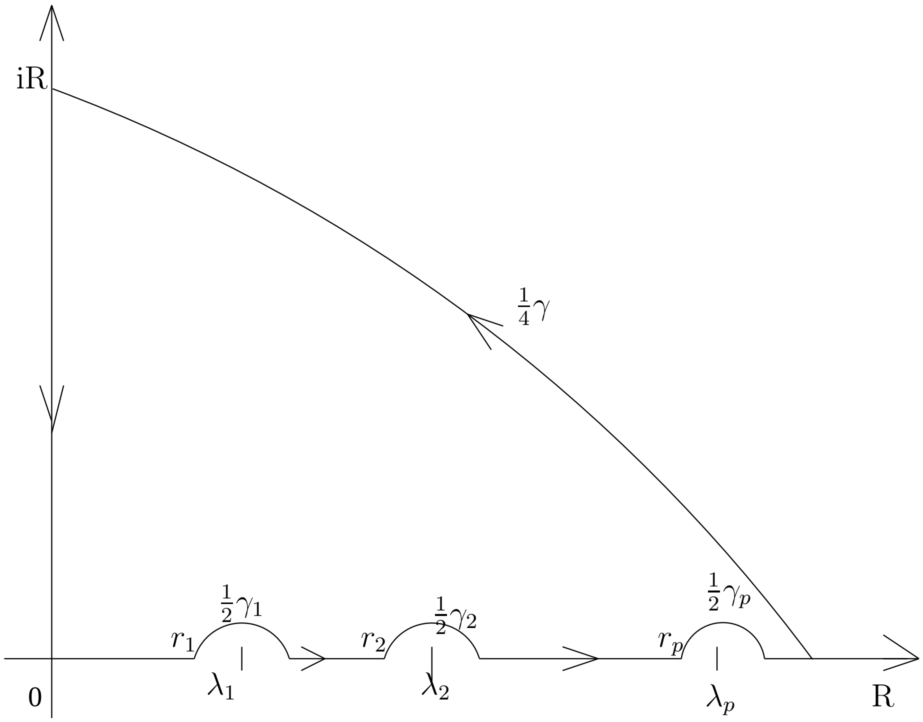
$$-\frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty} e^{i||x-y||\ \rho_p\sin\theta_1}\ \frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\frac{2\ t\rho_p}{t^2}$$

Preuve. On intègre la fonction méromorphe :

$$f(z) = e^{i\frac{||x-y||}{t}z\sin\theta_1}\ \frac{\frac{z}{t}}{(\frac{z}{t}+1)^5}\ \left[\frac{6}{t^2} + \frac{2z}{t^2}\ \frac{z\ \sin z}{z\ \cos z - \sin z}\right]$$

sur le contour Γ suivant :
$z = \lambda + i\mu,\ \lambda = t\rho$et $\lambda_k = t\rho_k$
$\Gamma = [0, r_1] + \frac{1}{2}\ \gamma_1(\lambda_1, \epsilon_1) + [r_1 + 2\epsilon_1, r_2] + \cdots + \cdots + \frac{1}{2}\ \gamma_p(\lambda_p, \epsilon_p) + [r_p + 2\epsilon_p, R] + \frac{1}{4}\ \gamma(0, R) + [iR, 0]$, $\quad \lambda_k \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ \ (k \in \mathbb{N})$ solution de l'equation $\lambda\cos\lambda - \sin\lambda = 0$,
On a $\int_\Gamma\ f(z)\ dz = 0$, car Γ est le bord orienté d'un compact K ne contenant pas de pôle de f.
Sur $[iR, 0], z = i\mu$ avec $\mu \in [R, 0]$ et puisque $\sin i\mu = ish\mu$ et $\cos i\mu = ch\mu$ on a

$$f(i\mu) = e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\ \frac{\frac{i\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5}\ \left[\frac{6}{t^2} + \frac{2i\mu}{t^2}\frac{-\mu\ sh\mu}{i(\mu\ ch\mu - sh\mu)}\right].$$



D'autre part, puisque $i(\mu\ ch\mu - sh\mu) = i\mu cosi\mu - \sin i\mu, i(\mu\ ch\mu - sh\mu)$ ne s'annule qu'au point 0 lorsque μ parcourt $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0 \times (0 + (-\frac{6}{t^2})(\frac{\mu^2}{6} - \frac{3}{30}\mu^2))_{/\mu=0} = 0$.
De plus $|f(z)| \rightarrow_{|z|\rightarrow+\infty} 0$ *pour* $z \in \frac{1}{4}\ \gamma(0,R)$ et $R \rightarrow +\infty$; car il existe $\delta > 0$ tel que $d(\frac{1}{4}\ \gamma(0,R), \lambda_k) \geq \delta$, pour $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $|e^{i\frac{||x-y||}{t}z\sin\theta_1}| = e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1} \leq 1$ puisque $\mu\sin\theta_1 > 0$.
D'aprés le lemme de Jordan , on a $\int_{\frac{1}{4}\ \gamma(0,R)} f(z)\ dz \rightarrow_{R\rightarrow+\infty} = 0$.
En écrivant $\Gamma = [0,R] + \frac{1}{4}\ \gamma(0,R) + [iR, 0]$ on a :

$$lim_{R\rightarrow+\infty} \int_{[0,R]} f(z)\ dz = -\ lim_{R\rightarrow+\infty} \int_{-iR}^{0} f(z)\ dz \qquad (2.9)$$

En choisissant $\epsilon_k = \epsilon > 0$ $(\forall k = 1, \cdots, \infty)$ et faisant tendre ϵ vers zéro, on obtient :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[0,R]} f(z)dz = t\int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\frac{\rho}{(1+\rho)^5}\times\left[\frac{6}{t^2}+\frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\sin t\rho}{t\rho\cos t\rho-\sin t\rho}\right]d\rho$$

$$-\sum_{p=1}^{+\infty} i\pi e^{i\frac{||x-y||\lambda_p}{t}\sin\theta_1}\times\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\,(-1)\,\frac{2t\rho_p}{t^2}$$

Comme :

$$\int_{[iR,0]} f(z)\,dz = i\int_R^0 e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\,\frac{\frac{i\mu}{t}}{(1+\frac{i\mu}{t})^5}\times[\frac{6}{t^2}+\frac{2i\mu}{t^2}\frac{-\mu\ sh\mu}{i(\mu ch\mu t-sh\mu)}\ ]\ d\mu$$

On obtient :

$$\overbrace{t\int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ \frac{\rho}{(1+\rho)^5}\times\left[\frac{6}{t^2}+\frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\sin t\rho}{t\rho\cos t\rho-\sin t\rho}\right]d\rho}^{t\ I_1}$$

$$-\ i\pi\sum_{p=1}^{+\infty}\ e^{i\frac{||x-y||\lambda_p}{t}\sin\theta_1}\times\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}(-1)\frac{2t\rho_p}{t^2}$$

$$=-i\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\,\frac{\frac{i\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5}\times\left[\frac{6}{t^2}+\frac{2i\mu}{t^2}\frac{-\mu\ sh\mu}{i(\mu ch\mu-sh\mu)}\right]\ d\mu$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\,\frac{\frac{i\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5}\times\left[\frac{6i}{t^2}-\frac{2i\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu-sh\mu)}\right]\ d\mu$$

Donc :

$$I_1=\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\frac{\frac{i\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5}\times\left[\frac{6i}{t^2}-\frac{2i\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu-sh\mu)}\right]\ d\mu$$

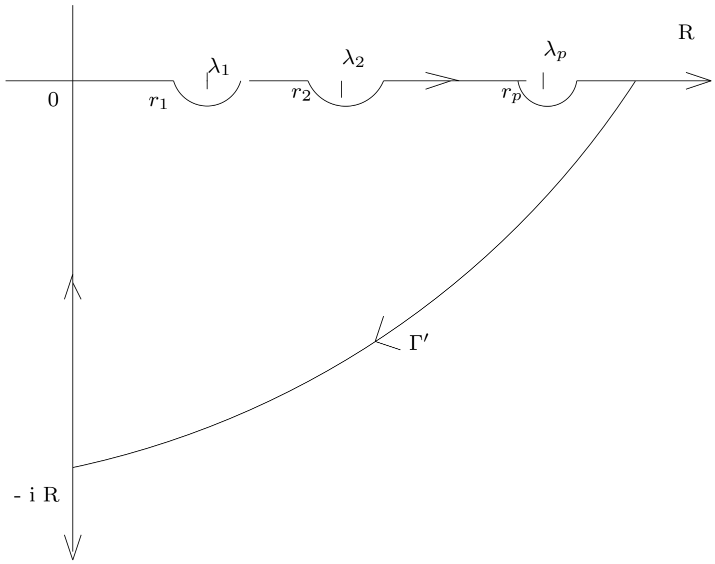
$$-\ \frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\ e^{i||x-y||\rho_p\sin\theta_1}\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\ \frac{2t\rho_p}{t^2}$$

Lemme 2.4 *Pour* $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ *et* $t > 0$*, on a*

$$I_2 = -\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{\frac{||x-y||}{t}\mu \sin\theta_1}\ \frac{\frac{\mu}{t}}{(\frac{-i\mu}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right] d\mu$$

$$+\frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\ e^{i||x-y||\rho_p \sin\theta_1}\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\ \frac{2t\rho_p}{t^2}$$

Preuve. On intègre $f(z)$ sur le contour Γ' suivant :



En procédant comme dans le lemme précédent, on obtient l'égalité pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$.

$$\overbrace{t\int_0^{+\infty} e^{i||x-y||\rho\sin\theta_1}\ \frac{\rho}{(1+\rho)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} + \frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\ \sin t\rho}{t\rho\ \cos t\rho - \sin t\rho}\right] d\rho}^{t\ I_2}$$

$$+\, i\pi \sum_{p=1}^{+\infty} e^{i\frac{||x-y||\rho_p}{t}\sin\theta_1}\ (-1)\ \frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\ \frac{2t\rho_p}{t^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\ \frac{\frac{\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} + \frac{2\mu}{t^2}\frac{-\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right] d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\ \frac{\frac{\mu}{t}}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{-\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right] d\mu$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{||x-y||}{t}\mu'\sin\theta_1}\ \frac{\frac{-\mu'}{t}}{(\frac{-i\mu'}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} + \frac{-2\mu'}{t^2}\frac{\mu'\ sh\mu'}{(\mu' ch\mu' - sh\mu')}\right] d\mu'$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1} \frac{\frac{\mu}{t}}{(\frac{-i\mu}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right] d\mu$$

D'où :

$$I_2 = -\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1} \frac{\frac{\mu}{t}}{(\frac{-i\mu}{t}+1)^5} \times \left[\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right] d\mu$$

$$+\ \frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty} e^{i||x-y||\rho_p\sin\theta_1}\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\ \frac{2t\rho_p}{t^2}$$

D'où le lemme.
Avec les lemmes 2.3 et 2.4, on calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1\cos^3\theta_1\ d\theta_1$ et $\int_{\frac{-\pi}{2}}^0 I_2\cos^3\theta_1\ d\theta_1$. On obtient (en remplaçant θ_1 par $\theta_1 = -\ \theta_1'$ lorsque $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ ainsi $\theta_1' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et en notant θ_1' par θ_1) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1\cos^3\theta_1\ d\theta_1 + \int_{\frac{-\pi}{2}}^0 I_2\cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta_1\int_0^{+\infty} e^{\frac{||x-y||}{t}\rho\sin\theta_1}\frac{\rho}{(1+\rho)^5}\left[\frac{6}{t^2} + \frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\ \sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho - \sin t\rho)}\right]d\rho$$

$$= \frac{i\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\frac{2t\rho_p}{t^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-i||x-y||\rho_p\sin\theta_1} - e^{i||x-y||\rho_p\sin\theta_1}\right)\cos^3\theta_1 d\theta_1$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2} - \frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right)\frac{\mu}{t} \times \left(\frac{1}{(\frac{-i\mu}{t}+1)^5} + \frac{1}{(\frac{i\mu}{t}+1)^5}\right)$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\cos^3\theta_1 d\theta_1$$

$$= \frac{\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\frac{2t\rho_p}{t^2}\left(2Re\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i||x-y||\rho_p\sin\theta_1}}{i}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1\right)$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2}-\frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right)\frac{\mu}{t}\frac{5(\frac{\mu^4}{t^4}+1-10\frac{\mu^2}{t^2})}{(\frac{\mu^2}{t^2}+1)^5}$$

$$\times\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1.$$

On calcul donc, en annexe :

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i||x-y||\ \rho_p\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{||x-y||}{t}\mu\sin\theta_1}\ \cos^3\theta_1\ d\theta_1$$

$$P = \frac{i}{||x-y||\ \rho_p} - \frac{2\ e^{i||x-y||\rho_p}}{||x-y||^2\rho_p^2} - 2\ i\ \frac{e^{i||x-y||\rho_p}-1}{||x-y||^3\ \rho_p^3}$$

$$Q = \frac{1}{||x-y||\frac{\mu}{t}} + \frac{2\ e^{-||x-y||\ \frac{\mu}{t}}}{||x-y||^2\ \frac{\mu^2}{t^2}} + 2\ \frac{e^{-||x-y||\frac{\mu}{t}}-1}{||x-y||^3\ \frac{\mu^3}{t^3}}$$

Avec l'égalité (2.8) On obtient une expression de Nu donnée par la proposition 2.4 enoncée dans le paragraphe 2.2.

Preuve de la proposition 2.4 On a :

$$Iu = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta_1\int_0^{+\infty} e^{i\rho||x-y||\sin\theta_1}\frac{\rho}{(1+\rho)^5}\left[\frac{6}{t^2}+\frac{2t\rho}{t^2}\frac{t\rho\sin t\rho}{(t\rho\cos t\rho-\sin t\rho)}\right]d\rho$$

$$= \frac{\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\frac{2t\rho_p}{t^2}\left[\frac{1}{||x-y||\rho_p} - \frac{2Re(\frac{e^{i||x-y||\rho_p}}{i})}{||x-y||^2\rho_p^2} - \frac{2Re(e^{i||x-y||\rho_p}-1)}{||x-y||^3\ \rho_p^3}\right]$$

$$-\frac{2}{t}\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2}-\frac{2\mu}{t^2}\frac{\mu\ sh\mu}{(\mu ch\mu - sh\mu)}\right)\frac{\mu}{t}\frac{5(\frac{\mu^4}{t^4}+1-10\frac{\mu^2}{t^2})}{(\frac{\mu^2}{t^2}+1)^5}$$

$$\times\left[\frac{1}{||x-y||\frac{\mu}{t}} + \frac{2e^{-||x-y||\frac{\mu}{t}}}{||x-y||^2\frac{\mu^2}{t^2}} + \frac{2(e^{-||x-y||\frac{\mu}{t}}-1)}{||x-y||^3\ \frac{\mu^3}{t^3}}\right]d\mu.$$

On pose $\sigma = \frac{\mu}{t}$, on obtient

$$Iu = \frac{\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2\rho_p}{(1+\rho_p)^5}\frac{2t\rho_p}{t^2}\left[\frac{1}{||x-y||\ \rho_p} - \frac{2\sin||x-y||\rho_p}{||x-y||^2\rho_p^2} - \frac{2(\cos||x-y||\rho_p - 1)}{||x-y||^3\ \rho_p^3}\right]$$
$$-2\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2} - 2\sigma^2\frac{sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t - sh\sigma t}\right)\frac{\sigma(5\sigma^4 - 10\sigma^2 + 1)}{(\sigma^2+1)^5}$$
$$\times\left[\frac{1}{||x-y||\sigma} + \frac{2e^{-||x-y||\sigma}}{||x-y||^2\sigma^2} + \frac{2(e^{-||x-y||\sigma} - 1)}{||x-y||^3\sigma^3}\right]d\sigma$$

Donc

$$Nu = (2\pi)^{-5}((1+\wedge)^5\Delta^{2-\frac{1}{2}}g)*$$
$$\left\{\frac{2\pi}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+\rho_p)^5}\frac{2t\rho_p}{t^2}\left[\frac{1}{||x||} - \frac{2\sin||x||\rho_p}{||x||^2\rho_p} - \frac{2(\cos||x||\rho_p - 1)}{||x||^3\ \rho_p^2}\right]\right.$$
$$-2\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{t^2} - 2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t - sh\sigma t}\right)\frac{(5\sigma^4 - 10\ \sigma^2 + 1)}{(\sigma^2+1)^5}$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{||x||} + \frac{2\ e^{-||x||\ \sigma}}{||x||^2\ \sigma} + 2\frac{e^{-||x||\sigma} - 1}{||x||^3\sigma^2}\right]d\sigma\right\}.$$

Pour $u \in W^{8,1}(\mathbb{R}^5_x)$ on a $h = (1+\wedge)^5\ \Delta^{2-\frac{1}{2}}\ u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^5_x) = \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^5_x)$.
En posant

$$P_{1,p} = \frac{1}{||x||} - \frac{2\sin||x||\rho_p}{||x||^2\rho_p} - \frac{2(\cos||x||\rho_p - 1)}{||x||^3\rho_p^2}$$
$$Q_{1,\sigma} = \frac{1}{||x||} + \frac{2e^{-||x||\sigma}}{||x||^2\ \sigma} + 2\ \frac{e^{-||x||\sigma} - 1}{||x||^3\sigma^2}$$

On a

$$h * P_{1,p} \in \mathcal{L}^{r=s}(\mathbb{R}^5_x) \text{ lorsque } P_{1,p} \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^5_x)\ \forall p \in \mathbb{N}^*$$
$$h * Q_{1,\sigma} \in \mathcal{L}^{r=s}(\mathbb{R}^5_x) \text{ lorsque } Q_{1,\sigma} \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^5_x)\ \forall \sigma \in [0,+\infty]$$

Pour tous $r > n = 5, (\frac{1}{||x||})^r$ est intégrable sur ${}^cB_{\mathbb{R}^n=5}(0,1)$.
Or

$$\begin{cases} \mathcal{L}^q * \mathcal{L}^r & = \mathcal{L}^s \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} & = \frac{1}{s} + 1 \text{ (ici } q = 1, \text{ donc } r = s) \end{cases}$$

En fait

$$\begin{cases} P_{1,p} & \in \mathcal{L}^r(\overline{B}(0,1)) \quad \text{et} \\ Q_{1,\sigma} & \in \mathcal{L}^r(\overline{B}(0,1)) \end{cases}$$

On écrit

$$P_{1,p} = P_{1,p}\chi + P_{1,p}\chi' \ (P_{1,p} = P_{1,p}(x))$$
$$Q_{1,\sigma} = Q_{1,\sigma}\chi + Q_{1,\sigma}\chi' \quad (Q_{1,\sigma} = Q_{1,\sigma}(x))$$

où

$$\begin{cases} \chi & \text{est la fonction caractéristique de } B(0,1) \\ \chi' & \text{est la fonction caractéristique de } {}^cB(0,1) \end{cases}$$

On a donc

$$Nu = (2\pi)^{-5}\Big\{ h * \frac{2\pi}{t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^5}{(\lambda_p+t)^5}(P_{1,p}\chi + P_{1,p}\chi') +$$
$$h*(-2)\int_0^{\infty}\left[\frac{6}{t^2} - 2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t - sh\sigma t}\right]\frac{5\sigma^4-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}(Q_{1,\sigma}\chi + Q_{1,\sigma}\chi')d\sigma\Big\}$$

Or

$$\begin{aligned}
&||h * \frac{2\pi}{t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^5}{(\lambda_p+t)^5}(P_{1,p}\chi + P_{1,p}\chi')||_r \\
&\leq ||h||_1\left[\frac{2\pi}{t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^5}{(\lambda_p+t)^5}\right] \times \big(\underbrace{||P_{1,p}\chi||_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}}_{=||P_{1,p}||_{\mathcal{L}^r(B(0,1))}} + \underbrace{||P_{1,p}\chi'||_{\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)}}_{=||P_{1,p}||_{\mathcal{L}^r({}^cB(0,1))}}\big) \\
&\leq ||h||_1\ \frac{2\pi}{t}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^5}{(\lambda_p+t)^5}\left[\rho_p^2 A(\mu_B)^{\frac{1}{r}} + \underbrace{\big(\int_{{}^cB}\frac{1}{||x||^r}\,dx\big)^{\frac{1}{r}}}_{B_r}\right]
\end{aligned}$$

Car

$$P_{1,p} = \rho_p\ (\rho_p||x||)\ \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\ [(\rho_p||x||)^2]^j \times \alpha_j,$$

avec $\alpha_j = \frac{2(2j+3)}{(2j+4)!}$.
Or
$\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j[(\rho_p||x||)^2]^j \times \alpha_j$ est une serie entière bornée uniformement par rapport à $\rho_p||x|| = a$ sur $\mathbb{R}_+$ par A .
Donc

$$||P_{1,p}||_{\mathcal{L}^r(B(0,1))} \leq \rho_p^2\ A\ (\mu_B)^{\frac{1}{r}}$$

et

$$||P_{1,p}||_{\mathcal{L}^r({}^cB(0,1))} \leq \left(\int_{{}^cB}\frac{1}{||x||^r}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} = B_r$$

On a aussi

$$\left\|h*(-2)\int_0^\infty\left[\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}\right]\frac{5\sigma^4-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}(Q_{1,\sigma}\chi+Q_{1,\sigma}\chi')d\sigma\right\|_r$$
$$\leq 2||h||_1\int_0^\infty\left[\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}\right]\frac{5\sigma^4-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}$$
$$\big(||Q_{1,\sigma}||_{\mathcal{L}^r(B(0,1))}+||Q_{1,\sigma}||_{\mathcal{L}^r(^cB(0,1))}\big)d\sigma$$

Or

$$||Q_{1,\sigma}||_{\mathcal{L}^r(B(0,1))}\leq\sigma\ C\ (\mu_B)^{\frac{1}{r}}$$

car

$$Q_1=\sigma\qquad\underbrace{\left(\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{l+2}{(l+3)!}||x||^l\sigma^l\right)}$$

serie entière de $b=||x||\sigma$ normalement convergente
de rayon de convergence ∞, bornée uniformement
par rapport à $||x||\sigma$ en valeur absolue par C

et

$$||Q_{1,\sigma}||_{\mathcal{L}^r(^cB(0,1))}\leq D(\int_{||x||>1}\frac{1}{||x||^r}\ dx)^{\frac{1}{r}}$$

car

$$Q_{1,\sigma}=\frac{1}{||x||}\left(1+2\frac{e^{-||x||\sigma}}{||x||\sigma}+\frac{2(e^{-||x||\sigma}-1)}{(||x||\sigma)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{||x||}\left(1+2\left[\frac{1}{||x||\sigma}+\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\frac{(||x||\sigma)^{l-1}}{l!}\right]\right.$$
$$\left.+2\left[\frac{-1}{||x||\sigma}+\sum_{l=2}^{+\infty}(-1)^l\frac{(||x||\sigma)^{l-2}}{l!}\right]\right)$$
$$=\frac{1}{||x||}\left(1+2\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^{m+1}(\frac{1}{(m+1)!}-\frac{1}{(m+2)!})(||x||\sigma)^m\right)$$

$$Q_{1,\sigma}=\frac{1}{||x||}\times\sum\ \left\{\begin{array}{l}\text{serie entière de } b=||x||\sigma \text{ normalement convergente}\\ \text{de rayon de convergence } \infty,\text{ bornée uniformement}\\ \text{par rapport à } ||x||\sigma \text{ en valeur absolue par } D\end{array}\right.$$

D'où :

$$\left|\left|h*(-2)\int_0^\infty\left[\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}\right]\frac{5\sigma-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}\ (Q_{1,\sigma}\chi+Q_{1,\sigma}\chi')d\sigma\right|\right|$$
$$\leq ||h||_1\int_0^\infty\left|\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}\right|\ \left|\frac{5\sigma^4-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}\right|\left(\sigma C\mu_B^{\frac{1}{r}}+DE_r\right)d\sigma$$

Or on a :

$$\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}=\frac{6(\sigma tch\sigma t-sh\sigma t)-2(\sigma t)^2\ sh\sigma t}{t^2\ (\sigma tsh\sigma t-sh\sigma t)}=\frac{N}{D},$$

notons $c=\sigma t$:

$$N=6\left[c\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c^{2i}}{(2i)!}-\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c^{2i+1}}{(2i+1)!}\right]-2c^2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{c^{2j+1}}{(2j+1)!}$$
$$N=c^5\sum_{j=0}^{+\infty}\left\{6\Big(\frac{1}{(2j+4)!}-\frac{1}{(2j+5)!}\Big)-\frac{2}{(2j+3)!}\right\}c^{2k}.$$

D'òu :

$$\frac{N}{D}=\sigma^2\ \frac{N'(c)}{D'(c)}$$

Soit

$$J=\int_0^\infty\left|\frac{6}{t^2}-2\sigma\frac{\sigma sh\sigma t}{\sigma tch\sigma t-sh\sigma t}\right|\ \left|\frac{5\sigma^4-10\sigma^2+1}{(\sigma^2+1)^5}\right|\left(\sigma C\mu_B^{\frac{1}{r}}+DE_r\right)d\sigma$$
$$J=\int_0^\infty\ j(\sigma,t)\ d\sigma.$$

Or

$$j(\sigma,t)\sim_{\sigma\to 0}-\frac{2}{5}\ \sigma^2DE_r$$
$$|j(\sigma,t)|\sim_{\sigma\to\infty}=\frac{2}{t}C(\mu_B)^{\frac{1}{r}}\frac{5}{\sigma^4}.$$

D'où la convergence pour $t\neq 0$ de J pour $t>0$.
Pour $t=0$

$$|j(\sigma,0)|\sim_{\sigma\to\infty}=\frac{2}{5}\ C\ (\mu_B)^{\frac{1}{r}}\frac{5}{\sigma^3}.$$

D'où la convergence de J pour $t=0$.

2.7 Inégalités $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ pour le système 2.10

$$\begin{cases} Ly = (\Box - N)y = f \\ y_{/t=0} = 0, y_{t/t=0} = g \end{cases} \tag{2.10}$$

On cherche une majoration $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^q$ en utilisant l'expression d'une solution sous la forme (Principe de Duhamel) $(n = 5)$:

$$y(t) = \Omega(t)\ g + \int_0^t\ \Omega(t-r)\ f(r)\ dr \tag{2.11}$$

où

$$\Omega(t)g = \frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x+tz)\ dz.$$

2.7.1 Inégalité $\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2$ pour (2.11)

On a

$$y(t,x) = \frac{t}{w_n}\ \int_S g(x+tz)\ dz + \int_0^t \frac{t-r}{w_n}\ \int_S\ f(r, x+(t-r)z)\ dz\ dr.$$

Donc

$$||y||_{\mathcal{L}^2} \leq\ t\ ||g||_{\mathcal{L}^2} + \int_0^t\ (t-r)\ ||f(r,.)||_{\mathcal{L}^2}\ dr.$$

Et

$$\widehat{y}(t,\xi) = \frac{t}{w_n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{-5}{2}}} \int_S \int_S \int_{\mathbb{R}^n=5} e^{-i(x+tz)\xi + itz.\xi} g(x+tz) dz dx$$

$$+ \int_0^t \frac{t-r}{w_n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{-5}{2}}} \int_S \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+(t-r)z.\xi)+i(t-r)z.\xi} f(r, x+(t-r)z) dz dr dx$$

$$\widehat{y}(t,\xi) = \frac{t}{w_n}\widehat{g}(.,\xi) \int_{S^{n-1}(0,1)} e^{itz.\xi} dz + \int_0^t \frac{t-r}{w_n}\widehat{f}(r,\xi) \int_S e^{i(t-r)z.\xi} dz dr$$

$$\widehat{y}(t,\xi) = \frac{3}{|\xi|^2}\ \widehat{g}(\xi)\Big\{ -\frac{\cos t|\xi|}{t} + \frac{\sin t|\xi|}{t^2|\xi|}\Big\} + \int_0^t \frac{3}{|\xi|^2}\widehat{f}(r,\xi)$$
$$\Big\{ -\frac{\cos(t-r)|\xi|}{(t-r)} + \frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)^2|\xi|}\Big\} dr.$$

Or

$$\frac{\partial\widehat{y}}{\partial t}(t,\xi) = \frac{3}{|\xi|^2}\ \widehat{g}(\xi)\Big\{\frac{|\xi|\sin t|\xi|}{t} + \frac{2\cos t|\xi|}{t^2} - \frac{2\sin t|\xi|}{t^3|\xi|}\Big\}$$
$$+\int_0^t \frac{3}{|\xi|^2}\widehat{f}(r,\xi)\Big\{\frac{|\xi|\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)} + \frac{2\cos(t-r)|\xi|}{(t-r)^2} - \frac{2\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)^3|\xi|}\Big\}dr.$$

Alors

$$|\xi|\ \widehat{y}(t,\xi) = \frac{3}{|\xi|}\ \widehat{g}(\xi)\Big\{-\frac{\cos t|\xi|}{t}+\frac{\sin t|\xi|}{t^2|\xi|}\Big\} + \int_0^t \frac{3}{|\xi|}\widehat{f}(r,\xi)$$
$$\Big\{-\frac{\cos(t-r)|\xi|}{(t-r)} + \frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)^2|\xi|}\Big\}dr$$

Remarque

$$\begin{aligned}\frac{\sin t|\xi|}{t^2|\xi|^2} - \frac{\cos t|\xi|}{t|\xi|} &= \frac{\sin u}{u^2} - \frac{\cos u}{u}\\ &=_{u\sim 0} \frac{1}{u} - \frac{u}{6} + \frac{u^3}{120} - \{\frac{1}{u} - \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24}\} + u^3\epsilon\\ &= \frac{1}{3}\ t\ |\xi| + t\ |\xi|\ \epsilon(t|\xi|)\end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\widehat{y}(t,\xi) = 3\ t\ \widehat{g}(\xi)\ \Big\{\frac{1}{t^2|\xi|^2}\big(\frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|} - \cos t|\xi|\big)\Big\}$$
$$+\int_0^t 3(t-r)\widehat{f}(r,\xi)\Big\{\frac{1}{(t-r)^2|\xi|^2}\big(\frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)|\xi|} - \cos(t-r)|\xi|\big)\Big\}\ dr$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{y}(t,\xi) = 3\widehat{g}(\xi)\Big\{\frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|} + 2\frac{\cos t|\xi|}{t^2|\xi|^2} - 2\frac{\sin t|\xi|}{t^3|\xi|^3}$$
$$+\int_0^t\ 3\ \widehat{f}(r,\xi)\Big\{\frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)|\xi|} + 2\frac{\cos(t-r)|\xi|}{(t-r)^2|\xi|^2} - 2\frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)^3|\xi|^3}\Big\}\ dr$$

$$|\xi|\ \widehat{y}(t,\xi) = 3\ \widehat{g}(\xi)\Big\{\frac{1}{t|\xi|}\big(\frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|} - \cos t|\xi|\big)\Big\}$$
$$+\int_0^t\ 3\ \widehat{f}(r,\xi)\Big\{\frac{1}{(t-r)|\xi|}\big(\frac{\sin(t-r)|\xi|}{(t-r)|\xi|} - \cos(t-r)|\xi|\big)\Big\}\ dr.$$

Lorsque $f = 0$,

$$|\frac{\partial\widehat{y}}{\partial t}(t,\xi)|^2 + |\xi|^2\ |\widehat{y}(t,\xi)|^2 =$$
$$\frac{9|\widehat{g}(\xi)|^2}{t^2|\xi|^2}\Big\{1 + \frac{\sin 2t|\xi|}{t|\xi|} + \frac{4\cos 2t|\xi| + \sin^2 t|\xi|}{t^2|\xi|^2} - 4\ \frac{\sin 2t|\xi|}{t^3|\xi|^3} + 4\ \frac{\sin^2 t|\xi|}{t^4|\xi|^4}\Big\}.$$

En posant $u = t|\xi|$,

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{1}{u^2}\left\{\ 1 + \frac{\sin 2u}{u} + \frac{4\cos 2u + \sin^2 u}{u^2} - 4\frac{\sin 2u}{u^3} + 4\frac{\sin^2 u}{u^4}\right\}\\ &= \frac{1}{u^2}\left\{\ 1 + \frac{\sin 2u}{u} + \frac{7\cos 2u + 1}{2u^2} - 4\frac{\sin 2u}{u^3} + 2\frac{1-\cos 2u}{u^4}\right\},\end{aligned}$$

est équivalent lorsque $u \to 0$ à $\frac{1}{9}$, $\varphi'(0) = 0$ (φ est paire) .
D'où :

$$||\nabla y||_{\mathcal{L}^2} + ||\partial_t y||_{\mathcal{L}^2} \leq\ c\ [\ ||g||_{\mathcal{L}^2} + \int_0^t\ ||f(r,.)||_{\mathcal{L}^2}\ dr\ ],$$

car

$$\frac{1}{t|\xi|}\Big(\frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|} - \cos t|\xi|\Big) \text{ et } \frac{1}{t^2|\xi|^2}\Big(\frac{\sin t|\xi|}{t|\xi|} - \cos t|\xi|\Big)$$

sont bornées sur $\mathbb{R}$; on conjecture que $c = 1$.

2.7.2 Inégalité $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^\infty$ pour (2.11) avec $f = 0$

On s'interèsse à

$$\begin{cases} Ly = (\Box - N)y = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^{n+1} \ (n=5) \\ y_{/t=0} = 0 \quad y_{t/t=0} = g \text{ dans } \mathbb{R}^n \ (n=5) \end{cases}$$

$$y = \frac{t}{w_n}\int_{S^4} g(x+tz)\ dz\ = \Omega(t)\ g$$

1.
On a

$$\begin{aligned}-\int_{S^4} g(x+tz)\ dz &= \int_{S^4}\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x+sz)\ ds\ dz\\ &= \int_{S^4}\int_t^{+\infty} (\nabla g)(x+sz).z\ ds\ dz\\ &= \int_{S^4}\int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5}(\nabla g)(x+sz)(sz)\ ds\ dz\\ &\text{(On pose } Z = sz)\\ &= \int_{|Z|>t} |Z|^{-5}\ (\nabla g)(x+Z).Z\ dZ\\ &(\text{car } s = |Z| \text{ et } s^4\ dz = dZ \text{ sur } S^4(0,s)\ )\end{aligned}$$

Cela implique :

$$\left| \int_{S^4} g(x+tz)\, dz \right| \leq t^{-4} \int_{|Z|>t} (\nabla g)(x+Z)\, dZ$$
$$\leq t^{-4}\, ||g||_{1,1}$$

2.
De façon analogue on a :

$$\begin{aligned}
-t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\; z\; dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(\nabla g)(x+sz)\; z\; ds\; dz \\
&= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla\nabla g)(x+sz)(z,z)\; ds\; dz \\
&= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5}\frac{s^4}{s^5}(\nabla\nabla g)(x+sz)(sz,sz)\; ds\; dz \\
&\text{(et en posant } \; Z = sz) \\
&= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^6} (\nabla\nabla g)(x+Z)(Z,Z)\; dZ
\end{aligned}$$

qui implique que :

$$| \; t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz).z\; dz \; | \leq t^{-3} \int_{|Z|>t} | \; \nabla\nabla g(x+Z) \; | \; dZ$$
$$| \; t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz).z\; dz \; | \leq t^{-3}\; ||g||_{2,1}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
-t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\; dz &= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(\nabla g)(x+sz)\; ds\; dz \\
&= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} (\nabla\nabla g)(x+sz).z\; ds\; dz \\
&= \int_{S^4} t \int_t^{+\infty} \frac{s^4}{s^5}(\nabla\nabla g)(x+sz)(sz)\; ds\; dz \\
&\text{(et on pose } Z = sz) \\
&= t \int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^5} (\nabla\nabla g)(x+Z)(Z)\; dZ
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\mid t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\ dz \mid \leq t^{-3} \int_{|Z|>t} \mid \nabla\nabla g(x+Z) \mid dZ$$

$$\mid t \int_{S^4} (\nabla g)(x+tz)\ dz \mid \leq t^{-3}\ ||g||_{2,1}$$

Rappelons que :

$$\begin{cases} w_n\ y_t(t,x) & = \int_{S^4}\ g(x+tz)\ dz + t\ \int_{S^4}\ \nabla g(x+tz)\ z\ dz \\ w_n\ \nabla y(t,x) & = \ t\ \int_{S^4}\ \nabla g(x+tz)\ dz \end{cases}$$

D'où pour $t \geq 1$

$$||D\Omega(t)g||_\infty \leq \frac{1}{w_n t^3}\ sup\ (\ ||g||_{1,1}, ||g||_{2,1}, ||g||_{1,1} + ||g||_{2,1}\ )$$

$$||D\Omega(t)g||_\infty \leq \frac{c}{t^3}\ ||g||_{2,1} \text{ car } \ ||g||_{1,1} \leq ||g||_{2,1}.$$

3. Maintenant soit $0 \leq t \leq 1$.
On a

$$-\int_{S^4} g(x+tz)\ dz = \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds} g(x+sz)\ ds\ dz$$

$$= -\int_{S^4} \int_t^{+\infty} (s-t)\ \frac{d^2}{ds^2}\ g(x+sz)\ ds\ dz$$

$$= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^2}{2}\ \frac{d^3}{ds^3}\ g(x+sz)\ dz\ ds$$

$$\Big(= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^2}{2} \sum_{ijklm} \partial_i\partial_j\partial_k g(x+sz)(z,z,z)dzds\Big)$$

$$\Big(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^2}{2|Z|^7} \sum_{ijklm} Z_iZ_jZ_k(\partial_i\partial_j\partial_k g)(x+Z)dZ\Big)$$

$$= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^3}{6}\ \frac{d^4}{ds^4}\ g(x+sz)\ dz\ ds$$

$$\Big(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^3}{6|Z|^8} \sum_{ijklm} Z_iZ_jZ_kZ_l(\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l g)(x+Z)dZ\Big)$$

$$= \int_{S^4} \int_t^{+\infty} \frac{(s-t)^4}{24}\ \frac{d^5}{ds^5}\ g(x+sz)\ dz\ ds$$

$$\Big(= \int_{|Z|>t} \frac{(|Z|-t)^4}{24|Z|^9} \sum_{ijklm} Z_iZ_jZ_kZ_lZ_m(\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m g)(x+Z)dZ\Big).$$

D'où

$$\Big| - \int_{S^4} g(x+tz)\, dz \Big| \leq \sum_{ijklm} \int |(\partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \partial_m g)(x+Z)|\, dZ$$

$$\Big| - \int_{S^4} g(x+tz)\, dz \Big| \leq g_{5,1}.$$

De façon analogue, on a les mêmes résultats pour les autres termes discutés dans le cas $t > 1$.
Ainsi nous avons obtenu : pour $0 \leq t \leq 1$.

$$||D\Omega(t)g||_\infty \leq c||g||_{6,1}$$

D'où $\forall\, t \geq 0$

$$||D\Omega(t)g||_\infty(t) \leq c\,(1+t)^{-3}\,||g||_{6,1}$$

Par interpolation on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.3 (*pour* $n = 5$)
Soit $2 \leq q \leq +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \forall N_p > (n+1)(1-\frac{2}{q})\ \exists\, c = c(q,n)$
$\forall\, g \in W^{N_p,p}\ \ \forall\, t \geq 0,$

$$||D\Omega(t)g||_q \leq c\,(1+t)^{-3(1-\frac{2}{q})}||g||_{N_p,p}$$

$N_p = (n+1)(1-\frac{2}{q})$ *est possible lorsque* $q \in \{2, +\infty\}$.

Preuve du Théorème 2.3 En effet

$T_t : W^{6,1} \to L^\infty$ avec la norme $M_0 \leq c\,(1+t)^{-3}$.
$T_t : L^2 \to L^2$ avec la norme $M_1 \leq c$ (on peut prendre $c = 1$)

Avec les espaces d'interpolation $[\ ,\ ]_\theta$ on a :

$$1 \leq q_0,\ \ q_1 \leq \infty,\ \ [L^{q_0}, L^{q_1}]_\theta = L^{q_\theta}$$

où

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

En particulier $[L^\infty, L^2]_\theta = L^{q_\theta}$, $q_\theta = \frac{2}{\theta}$.
On a aussi $W^{N,p_\theta} \hookrightarrow [W^{n,1}, L^2]_\theta$ *si* $N > (1-\theta)n$ où $\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{q_\theta} = 1$

(pour $\theta \in \{0,1\}$, on peut permettre $N = (1-\theta)n$) .
D'autre part pour $t \geq 1$ on a

$$-\int_{S^{n-1}} g(x+tz)\,dz = \int_{S^{n-1}} \int_t^\infty \frac{d}{ds}\, g(x+sz)\,dz$$
$$= \int_{S^{n-1}} \int_t^\infty \frac{s^{n-1}}{s^n} (\nabla g)(x+sz)(sz)\,dz$$

ce qui implique :

$$\Big| \int_{S^{n-1}} g(x+tz)\,dz\Big| \leq t^{-(n-1)} \int_{|Z|\geq t} |\nabla g(x+Z)|\,dZ \leq t^{-(n-1)}\, ||g||_{1,1},$$

De même

$$\Big|\, t\int_{S^{n-1}} \nabla g(x+tz)\,dz\Big| \leq t^{-(n-2)}\, ||g||_{2,1}.$$

On a aussi

$$-\int_{S^{n-1}} (\nabla g)(x+tz)\,z\,dz = \int_{S^{n-1}} t\int_t^\infty \frac{s^{n-1}}{s^n}\,\frac{s^{n-1}}{s^n}\,(\nabla\nabla g)(x+sz)(sz,sz)\,ds\,dz$$
$$= t\int_{|Z|>t} \frac{1}{|Z|^{n+1}}\,(\nabla\nabla g)(x+Z)(Z,Z)\,dZ$$

$$\Big|\, t\int_{S^{n-1}} \nabla g(x+tz)\,z\,dz\,\Big| \leq t^{-(n-2)} \int_{|Z|>t} \big|\nabla\nabla g(x+Z)\big|\,dZ.$$

Donc

$$\Big|\, t\int_{S^{n-1}} \nabla g(x+tz)\,z\,dz\Big| \leq t^{-(n-2)}\, ||g||_{2,1}.$$

Par conséquent on conjecture que l'on a :

$$||D\Omega(t)g||_q \leq c\,(1+t)^{-(n-2)(1-\frac{2}{q})}\, ||g||_{N_p,p},$$

lorsque n est quelconque entier ≥ 1 .
Remarque Pour l'opérateur des ondes $\Box$, on a pour $(n=5)$:

$$\|DW(t)y\|_q \leq c(1+t)^{-2(1-\frac{2}{q})}\|y\|_{N_p,p}$$

avec $N_p > n(1-\frac{2}{q})$, ($N_p = n(1-\frac{2}{q})$ est possible lorsque $q \in \{2,+\infty\}$)

Proposition 2.5 *Lorsque $g \in S(\mathbb{R}^n)$ pour (n=5), le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ \Box - N\ )y = 0 \\ y_{/t=0} = 0, \quad y_{t/_{t=0}} = g \end{array} \right.$$

possède une seule solution notée :

$$y(t,x) = \Omega(t)g(x) = \frac{t}{w_n} \int_{S^4} g(x+tz)\ dz\ = \Omega(t)\ g \tag{2.12}$$

Preuve de la proposition 2.5 L'existence de la solution y donnée par (2.12) résulte de la construction de L (ie. de N) effectuée au paragraphe 5. Pour l'unicité de cette solution, il suffit de constater d'abord que $L = \Box - N$ est auto-audjoint ($L = \widehat{L}$), $\int_0^T \int_{R_x^5} Ly.\overline{z}\ dt\ dx = \int_0^T \int_{R_x^5} y.\overline{Lz}\ dt\ dx$ en utilisant la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{x\to\xi}$ et le théorème de Plancherel . Puis d'appliquer un raisonnement du type de Hölmgren sur le problème de Cauchy rétrograde associé à l'adjoint $\widehat{L}$ de L pour montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ \Box - N\ )y = 0 \\ y_{/t=0} = 0, \quad y_{t/_{t=0}} = g \end{array} \right\} \Longrightarrow\ \forall z \in C^2([0,T], S(R^n)),$$

$$\int_0^T \int y\overline{\widehat{L}u}\ dt\ dx = \int_0^T \int (Ly)\ \overline{u} = 0\ = \int_0^T \int 0\ dt\ dx = 0,$$

$$\left(\text{en résolvant } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{L}u = z \\ u(\theta,x) = 0\ , \quad u_t(\theta,x) = 0 \end{array} \right. \right)$$

D'où $y(t,x) = 0$ et l'unicité de y (cf [11]).

2.8 Existence locale d'une solution de l'equation semi-linéaire pour $n = 5$

Il s'agit du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly = f(Dy) \\ y_{/t=0} = 0, \ \ y'_{t/t=0} = g \end{array} \right.$$

(On peut toujours supposer que $c = 1$)
On effectue la récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly_{n+1} = f(Dy_n) \\ y_{n+1/t=0} = 0, \ \ (y_{n+1})_{t/t=0} = g \end{array} \right.$$

et on utilise les estimations (2.13) et (2.14) dans L^2

$$||\nabla^r Dy_{n+1}||_2 \leq ||\nabla^r g||_2 + \int_0^t \; ||\nabla^r (f \circ Dy_n)||_2(\theta)\, d\theta \qquad (2.13)$$

$$||\nabla^r (Dy_p - Dy_q)||_2 \leq \int_0^t \; ||\; \nabla^r (f \circ Dy_{p-1} - f \circ Dy_{q-1})\; ||_2(\theta)\, d\theta \qquad (2.14)$$

Pour $r, m, n \; \in \mathbb{N},\; 1 \leq p \leq \infty,\; h \in C^r(\mathbb{R}^m),\; B = ||h||_{C^r\overline{(B(0,1))}}$, il existe une constante $c = c(r, m, n, p) > 0$ telle que $\forall w = (w_1, \cdots, w_m) \in W^{r,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^r(\mathbb{R}^n)$ tel que $||w||_\infty \leq 1$, on ait l'inégalité

$$||\nabla^r h(w)||_p \leq c\; B\; ||\nabla^r w||_p$$

(cf lemme 4.7 p46 et Remarque p48 de [26]),
si l'hypothèse $||w||_\infty \leq 1$ est remplacée par $||w||_\infty \leq \Gamma$ pour $\Gamma \geq 1$ et B remplacé par $B_\Gamma = Sup||h||_{C^r\overline{(B(0,\Gamma))}}$ alors on a l'inégalité

$$||\nabla^r h(w)||_p \leq c\; B_\Gamma\; \Gamma^{r-1}\; ||\nabla^r w||_p$$

(On peut remplacer aussi par $w \in W^{r,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$) .
Supposons avoir démontrer que $||Dy_n||_{L^\infty} \leq \Gamma$ $(\forall n)$ alors

$$||\nabla^r Dy_{n+1}||_2(t) \leq ||\nabla^r g||_2 + \int_0^t \; cB_\Gamma\; \Gamma^{r-1}\; |\nabla^r Dy_n|_{0,\theta_1}\; d\theta_1$$

et pour $0 \leq t \leq T$ on a :

$$\begin{aligned} |\nabla^r Dy_{n+1}|_{0,T} \leq ||\nabla^r g||_2 + \Big\{ & \; t(cB_\Gamma\; \Gamma^{r-1})||\nabla^r g||_2 \\ & + \int_0^t (cB_\Gamma\; \Gamma^{r-1})^2 \int_0^{\theta_1} \; |\nabla^r Dy_{n-1}|_{0,\theta_2}\; (\theta_2)\; d\theta_2\; d\theta_1 \Big\} \\ |\nabla^r Dy_{n+1}|_{0,t} \leq (1 + t(cB_\Gamma\; & \Gamma^{r-1})||\nabla^r g||_2 \\ & + (cB_\Gamma\; \Gamma^{r-1})^2 \; \int_0^t \int_0^{\theta_1} \; |\nabla^r Dy_{n-1}|_{0,\theta_2}\; d\theta_2\; d\theta_1 \end{aligned}$$

et par récurrence on a :

$$\begin{aligned} |\nabla^r Dy_{n+1}|_{0,t} \leq & \left(\sum_{k=0}^n \; |\frac{t^k}{k!}\; (c\; B_\Gamma\; \Gamma^{r-1})^k| \right) ||\nabla^r g||_2 \\ & + (cB_\Gamma \Gamma^{r-1})^{n+1} \int_0^t \int_0^{\theta_1} \cdots \int_0^{\theta_n} \; |\nabla^r Dy_0|_{0,\theta_{n+1}} d\theta_{n+1} \cdots d\theta_1 \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^t \int_0^{\theta_1} \cdots \int_0^{\theta_n} |\nabla^r D y_0|_{0,\theta_{n+1}} \, d\theta_{n+1} \cdots \, d\theta_1 = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} |\nabla^r D y_0|_{0,\tau} d\tau$$

D'où, pour tout $r \geq 1$

$$\begin{aligned} ||\nabla^r D y_{n+1}||_2(t) &\leq \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \, (c \; B_\Gamma \; \Gamma^{r-1})^k \right] ||\nabla^r g||_2 + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \, ||\nabla^r g||_2 \\ &= [\sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} \, (c \; B_\Gamma \; \Gamma^{r-1})^k \;] \; ||\nabla^r g||_2 \end{aligned}$$

$$||\nabla^r D y_{n+1}||_2(t) \leq e^{tcB_\Gamma^r} \; ||\nabla^r g||_2.$$

Si $r = 0, \; f(0) = 0$ implique

$$f(Dy_n) = f(Dy_n) - f(0) = \int_0^1 \, (d_n f) \; (rDy_n) \; dr \circ Dy_n$$

$$||f(Dy_n)||_2 \leq B_\Gamma^1 \; ||Dy_n||_2$$

et

$$||Dy_{n+1}||_2(t) \leq e^{tB_\Gamma^1} \; ||g||_2$$

D'où

$$||Dy_{n+1}||_{r,2}(t) \leq e^{tB_\Gamma^1} \; ||g||_2 + \sum_{s=1}^{r} \; e^{tcB_\Gamma^s \Gamma^{s-1}} \; ||\nabla^s g||_2$$

Si $r > \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} ||Dy_{n+1}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq K_r \; ||Dy_{n+1}||_{r,2}(t) \\ &\leq K_r \big\{ e^{tB_\Gamma^1} \; ||g||_2 + \sum_{s=1}^{r} \; e^{tcB_\Gamma^s \Gamma^{s-1}} \; ||\nabla^s g||_2 \big\} \end{aligned}$$

On choisit donc T tel que $0 \leq t \leq T$ implique

$$K_r \big\{ e^{tB_\Gamma^1} \; ||g||_2 + \sum_{s=1}^{r} \; e^{tcB_\Gamma^s \Gamma^{s-1}} \; ||\nabla^s g||_2 \big\} \leq \Gamma$$

Pour $t = 0$ on a $K_r \; ||g||_{r,2} \leq \Gamma$ alors $||Dy_n||_\infty \leq \Gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui donne T déterminé par :

$$K_r \big\{ e^{TB_\Gamma^1} \; ||g||_2 + \sum_{s=1}^{r} \; e^{TcB_\Gamma^s \Gamma^{s-1}} \; ||\nabla^s g||_2 \big\} \leq \Gamma$$

Ainsi on a le lemme :

Lemme 2.5 $(s > \frac{n}{2})$ $\exists R, L, T_* > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait :*

(i) $|Dy_n|_{s,T_*} \leq R$

(ii) $|\partial_t Dy_n|_{s-1,T_*} \leq L$

(iii) $\forall\,(t,x) \in [0,T_*] \times \mathbb{R}^5, |Dy_n(t,x)| \leq g_2 = \Gamma$

On utilise (2.14) et (i) pour montrer que $(Dy_n)_n$ est de Cauchy dans $C^2([0,T], W^{s,2})$ on obtient

$$||Dy_p - Dy_q||_{s,2}(t) \leq \frac{t^n}{n!}\,(||Dy_{p-n} - Dy_{q-n}||_{s,2})$$

pour $p, q \geq n > N$.
D'où

$$||Dy_p - Dy_q||_{s,2}(t) \leq 2R\frac{t^n}{n!} \longrightarrow_{N\to\infty} 0$$

on a alors le théorème :

Théorème 2.4 *Soit* $u_0 = g, 0 \in W^{s,2},\ s \in \mathbb{N},\ s > \frac{n}{2} + 1$.
Soit $g_1 = K_s\ ||u_0||_{s,2}$ *et* $g_2 > g_1$ *arbitraire mais fixé .*
Alors il existe $T > 0$ *et une solution classique* y *unique dans* $C_b^2([0,T] \times \mathbb{R}^5)$ *du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Ly = f(Dy) \quad (avec f(0) = df(0) = 0, d^2f(0) \neq 0\ ; f \in C^\infty) \\ y_{/t=0} = 0, \ \ y_{t/t=0} = g \end{cases}$$

avec

$$Sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^5} |\ Dy(t,x)\ | \leq g_2$$

et

$$Dy \in C^0([0,T], W^{s,2}(\mathbb{R}^5)) \cap C^1([0,T], W^{s-1,2}(\mathbb{R}^5))$$

Remarque : L'unicité de y vient de l'unicité dans la proposition 2.5 (problème linéaire) et du fait que l'on a :
Si y_1 et y_2 sont deux solutions de

$$\begin{cases} Ly = f(Dy) \quad (f(0) = df(0) = 0) \\ y(t=0) = 0\ , \ \ y_{t/t=0} = g \end{cases}$$

$$y_1 - y_2 = \int_0^t \frac{(t-r)}{w_n}\big[f(Dy_1(r, x+(t-r)u)) - f(Dy_2(r, x+(t-r)u))\big]\ du\ dr$$

$$\begin{aligned} |Dy_1 - Dy_2|_{0,t} &\leq \int_0^t \frac{(t-r)}{w_n}\ ||f||_{C^1(B(0,1))} \int_0^\theta ||Dy_1 - Dy_2||_{0,\theta_1}\, d\theta_1\, dr \\ &\leq \cdots \\ &\leq \frac{t^k}{k!}\ |Dy_1 - Dy_2|_{0,t} \quad \to_{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

2.9 Existence globale (n=5)

Posons $u = Dy$ et démontrons les théorèmes suivants :

Théorème 2.5 *Il existe une constante $c > 0$, qui est indépendante de T et de $u_0 = \{g, 0\}$ tel que la solution locale y déterminée au paragraphe 2.8 vérifie si $||Dy||_\infty < 1$,*

$$\forall\, t \in [0,T],\ ||Dy(t)||_{s,2} \leq c||g||_{s,2}\, exp\Big\{c\int_0^t\ ||\nabla u(r)||_\infty\, dr\Big\}$$

Preuve du Théorème 2.5 On a :

$$||\nabla^\alpha Dy||_2 \leq ||\nabla^\alpha g||_2 + \int_0^t\ ||\nabla^\alpha f(Dy)||_2(\theta)\, d\theta$$

On utilise la remarque ,(p 48 de [26]),

$$(|\alpha| \leq s, ||\nabla^\alpha f(Dy)|| \leq c||f||_{C^s\overline{(B(0,\Gamma))}}\ ||\nabla u||_\infty^{s-1}\ ||Dy||_{s,2}; ||Dy||_\infty < \Gamma)$$

D'où

$$||Dy||_{s,2} \leq ||g||_{s,2} + c\ ||f||_{C^s\overline{(B(0,\Gamma))}}\ \int_0^t\ ||\nabla u||_\infty^{s-1}\ ||Dy||_{s,2}\, d\theta$$

D'après le lemme de Gronwall on a

$$||Dy||_{s,2} \leq ||g||_{s,2}\, exp\bigg(\ \int_0^t\ c\ ||f||_{C^s\overline{(B(0,\Gamma))}}\ ||\nabla u||_\infty^{s-1}(r)\, dr\bigg)$$

Théorème 2.6 *Soient s_0, s_1 satisfaisant*

$$s_1 > [\frac{s_1 + N_{\frac{4}{3}}}{2}], s_0 > s_1 + N_{\frac{4}{3}} + 1$$

Soit

$$u_0 = g, 0 \in W^{s_0,2} \cap W^{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}}$$

Alors il existe $M_0 > 0$ et $\delta_1 > 0$, tous deux indépendants de T et u_0, tel que l'on ait l'implication :

$$\begin{aligned}||u_0||_{s_0,2} + ||u_0||_{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}} &\leq \delta_1 \Longrightarrow M_{s_1}(T) = sup_{0\leq t\leq T}\ (1+t)^{\frac{n-2}{2}}\ ||u(t)||_{s_1,4}\\ &\leq M_0\end{aligned}$$

La preuve du théorème résulte des lemmes suivants :

Lemme 2.6 *Si* $f(0) = f'(0) = 0$, *alors*

$$||f(u)||_{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}} \leq c\ ||u||_{s_1,4}\ ||u||_{s_0,2}$$

(on remarque que $W^{s_0,2} \hookrightarrow W^{s_1,4}$ *car* $s_0 > s_1 + \frac{n}{4}$ *)*

Preuve du lemme 2.6 On a :

$$\begin{aligned} ||f(u)||_q &= ||f(u) - f(0)||_q \\ &= ||\int_0^t (\nabla_u f)(ru)u\ dr||_q \\ &= ||\int_0^1 [(\nabla_u f)(ru) - \nabla_u f(0)\ ]u\ dr||_q \\ &= ||\int_0^1 dr \int_0^1 (\nabla_u \nabla_u f(sru)(ru,u)\ ds||_q \\ &\leq c\ ||u.u||_q \\ &\leq c\ ||u||_2||u||_4 \\ &\leq c\ ||u||_{s_0,2}||u||_{s_1,4} \quad (\text{ici } q = \frac{4}{3}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} ||f(u)||_{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}} &\leq \sum_{0\leq|\alpha|\leq s_1+N_{\frac{4}{3}}} ||\nabla^\alpha f(u)||_{\frac{4}{3}} \\ &= ||f(u)||_{\frac{4}{3}} + \sum_{j=1}^n \sum_{0\leq|\beta|\leq s_1+N_{\frac{4}{3}}-1} ||\nabla^\beta[(\nabla f)(u)\partial u]||_{\frac{4}{3}} \\ &\leq c||u||_{\frac{4}{3}} + \sum_{j=1}^n \sum_{0\leq|\gamma|+|\delta|\leq s_1+N_{\frac{4}{3}}-1(<s_0-1)} ||\nabla^\gamma[(\nabla f)(u)(\nabla^\delta\partial_j u)||_{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Si $|\gamma| > s_1,$ alors $|\delta| < N_{\frac{4}{3}} - 1 \Longrightarrow |\delta| + 1 < N_{\frac{4}{3}} \leq s_1$

$$\begin{aligned} ||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)(\nabla^\delta\partial_j u)||_{\frac{4}{3}} &\leq ||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)||_2\ ||\nabla^{\delta+1}||_4 \quad (\text{ d'aprés Hölder}) \\ &\leq c\ ||u||_{s_0,2}\ ||u||_{s_1,4}. \end{aligned}$$

Si $|\delta| + 1 > s_1,$ alors $|\gamma| \leq N_{\frac{4}{3}} \leq s_1$ et

$$\begin{aligned} ||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)\nabla^\delta\partial_j u||_{\frac{4}{3}} &\leq ||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)||_4\ ||\nabla^\delta\partial_j u||_2 \\ &\leq\ c\ ||\nabla^{|\gamma|}u||_4\ ||u||_{\delta+1,2} \\ &\leq\ c\ ||u||_{s_1,4}\ ||u||_{s_0,2}. \end{aligned}$$

Si $|\gamma| \leq s_1$ *et* $|\delta| + 1 \leq s_1$ alors

$$\begin{aligned}
||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)\nabla^\delta\partial_j u||_{\frac{4}{3}} &\leq ||\nabla^\gamma(\nabla f)(u)||_2 \, ||\nabla^{|\delta|+1}u||_4 \\
&\leq c \, ||u||_{s_0,2} \, ||u||_{s_1,4}.
\end{aligned}$$

D'où le lemme .

Lemme 2.7 *La solution y peut s'écrire :*

$$\begin{aligned}
y(t) &= D\Omega(t)g + \int_0^t \, D\Omega(t-r) \, f(r) \, dr \\
&= \sum_{j=1,3} \, u^j(t)
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2.6 On a

$$\begin{aligned}
(*) \qquad ||u^1(t)||_{s_1,4} &\leq \; c \, (1+t)^{-(n-2)(1-\frac{2}{4})}||g_1 = g||_{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}} \\
&\leq \; c \, (1+t)^{-d} \, \delta_1
\end{aligned}$$

$(d = (n-2) \, \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1)$

$$\begin{aligned}
||u^3(t)||_{s_1,4} &\leq \; c \, \int_0^t \, (1+t-r)^{-d} \, ||f(r)||_{s_1+N_{\frac{4}{3}},\frac{4}{3}} \, dr \\
&\leq \; c \, \int_0^t \, (1+t-r)^{-d} \, ||u(r)||_{s_1,4} \, ||u(r)||_{s_0,2} \, dr
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5, on obtient :

$$\begin{aligned}
||u^3(t)||_{s_1,4} &\leq c \int_0^t (1+t-r)^{-d}||u(r)||_{s_1,4}||u_0||_{s_0,2} exp\Big\{c \int_0^t \, ||\nabla u||_\infty(\tau) \, d\tau\Big\}dr \\
&\leq c\delta_1 exp\Big\{c \int_0^t \, ||\nabla u||_\infty(\tau) \, d\tau\Big\} \int_0^t (1+t-r)^{-d}||u(r)||_{s_1,4}dr \\
&\leq c\delta_1 \; exp\Big\{c \int_0^t \, ||\nabla u||_\infty(\tau)d\tau\Big\}M_{s_1}(t)(1+t)^{-d} \\
&\times \int_0^t (1+t)^d(1+t-r)^{-d}(1+r)^{-d}dr
\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^t \, (1+t)^d \, (1+t-r)^{-d} \, (1+r)^{-d} \, dr$ est bornée indépendament de t ($d > 1$). (cf ([26] Lemme **7.2 p 88**).
D'où $||u^3(t)||_{s_1,4} \leq c \, \delta_1 \, (1+t)^{-d} \, M_{s_1} \; exp\{c \int_0^t \, ||\nabla u(\tau)||_\infty\} \, d\tau$.

D'après le théorème d'injection de Sobolev on a

$$||\nabla u||_\infty \leq c\ ||u||_{s_1,4}$$

Cela implique :

$$\begin{aligned}\int_0^t\ ||\nabla u(\tau)||_\infty\ d\tau &\leq c\ \int_0^t\ (1+\tau)^{-d}\ (1+\tau)^d\ ||u(\tau)||_{s_1,4}\ d\tau \\ &\leq c\ M_{s_1}(t)\ \int_0^t\ (1+t)^{-d}\ d\tau \\ &\leq c\ M_s(t).\end{aligned}$$

D'où

$$(**)\quad ||u^3(t)||_{s_1,4} \leq c\ \delta_1\ (1+t)^{-d}\ M_{s_1}\ \exp\{cM_{s_1}(t)\}.$$

Avec (*) et (**) on a :

$$||u||_{s_1,4}(t) \leq c\ \delta_1\ (1+t)^{-d} + c\ \delta_1\ (1+t)^{-d}\ M_{s_1}(t)\ exp\{cM_{s_1}(t)\}.$$

D'où

$$(***)\quad M_{s_1}(t) \leq c\ \delta\ (\delta_1)\ (1+M_{s_1}(t))\ exp\{cM_{s_1}(t)\}$$

$0 \leq t \leq T$ on a $W^{s_0,2} \hookrightarrow W^{s_1,4}$ *et* $c >$ *constante d'injection*
Soit $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = c\ \delta_1\ (1 + xe^{cx}) - x$$

On a $\varphi(0) = c\ \delta_1,\ \ \varphi'(0) = c\ \delta_1 - 1$
φ a un premier zéro positif en x_0 avec $\varphi'(x_0) < 0$ si δ_1 suffisament petit $(\delta_1 = \delta_1(c))$

$$0 = \varphi(x_0) = c\ \delta_1\ (1 + x_0e^{cx_0}) - x_0$$

implique

$$\delta_1 = \frac{x_0}{c(1+x_0e^{cx_0})} < \frac{x_0}{c}$$

où

$$(****)\quad M_{s_1}(0) = ||u_0||_{s_1,4} \leq \tilde{K}\ ||u_0||_{s_0,2} \leq \tilde{K}\ \delta_1 < x_0$$

s'en suit (****) implique $\varphi(M_{s_1}(t)) \geq 0,\ 0 \leq t \leq T$ et avec (****) et un argument de dépendance continue on obtient

$$M_{s_1}(t) \leq x_0,\ 0 \leq t \leq T.$$

Ce qui donne le théorème 2.6 avec

$$M_0 = x_0 = x_0(\delta_1).$$

On a, avec les deux théorèmes précédents

$$\begin{aligned}
||u(t)||_{s,2} &\leq c\ ||u_0||_{s,2}\ exp\{c \int_0^t\ ||\nabla u||_\infty(\tau)\ d\tau\} \\
&\leq c\ ||u_0||_{s,2} exp\{cM_{s_1}(t)\} \\
&\leq c\ ||u_0||_{s,2} exp\{cM_0\} \\
&\leq K||u_0||_{s,2}
\end{aligned}$$

pour $0 \leq t \leq T$ et $K = exp\{cM_0\}$ indépendants de T et de u_0, on termine comme dans ([26] **p.91 − 92**) et on remarque que

$$\begin{aligned}
||u(t)||_\infty \leq c\ ||u(t)||_{s_1,4} &\leq c\ M_{s_1}(t)\ (1+t)^{-\frac{n-2}{2}} \\
&\leq c\ M_0\ (1+t)^{-\frac{n-2}{2}}
\end{aligned}$$

D'où le théorème 2.2 d'existence globale enoncé dans le paragraphe 2.2 .

2.10 Remarques

On a $Ly = (\Box - N)y = \partial_{tt}^2 y - p(t, Dy)$
a)

$$p(t,\xi) = \frac{\int_C\ e^{itz.\xi}\ (2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2)dz}{t \int_C e^{itz.\xi}\ dz}$$

$$et$$

$$e^{itz.\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k t^k z^k \xi^k}{k!} = 1 + itz.\xi + \frac{i^2 t^2 z^2 \xi^2}{2} + \cdots$$

$$e^{itz.\xi}(2i(z.\xi) - t(z.\xi)^2) = 2iz.\xi + (2i^2 t - t)(z.\xi)^2 + \cdots$$

donc

$$\begin{aligned}
p(t,\xi) \rightarrow_{t\to 0} &= \frac{-3\int_C (z.\xi)^2 dz}{\int_C\ dz} \quad \text{si } \int_C (z.\xi)dz = 0 \Leftrightarrow \int_C zdz = 0\ \forall \xi \\
&= \frac{-3|\xi|^2}{n} \qquad \text{si } C = S^{n-1}(0,1)
\end{aligned}$$

car

$$\int_{S^{n-1}} (z.\xi)^2 dz$$
$$= |\xi|^2 \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta_1[\sin^2\theta_1]d\theta_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_{n-2}d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3}\theta_2\ d\theta_2 \cdots \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\ \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}}$$
$$= |\xi|^2 \left(\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta_1[\sin^2\theta_1]d\theta_1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta_1\ d\theta_1} \right)$$
$$= \frac{|\xi|^2}{n}$$

b) On a
$$p(t,\xi) \to_{t\to\infty} -|\xi|^2 \text{ si } C = S^{n-1}(0,1)$$

c) On conjecture que l'on peut avoir un théorème analogue à celui du paragraphe 2.9 lorsque $n \geq 5$ et $C = S^{n-1}$ dans ce cas $p_n(t,\xi) = T_1(t,\xi) + T_2(t,\xi)$ avec $T_1(t,\xi) \sim_{|\xi|\to\infty} -|\xi|^2$ $(\forall\ t > 0)$ et $T_2(t,\xi) = \frac{2}{t}\ \frac{D'_t}{D_0}$ avec $D = \int_S\ e^{itz.\xi}\ dz$ $(= t|\xi|\cos t|\xi| - \sin t|\xi|$ lorsque $n = 5)$, on a en effet

$$p(t,\xi) = -\frac{\int_S e^{itz.\xi}(z.\xi)^2 dz}{\int_S e^{itz.\xi}\ dz} + \frac{2}{t}\frac{\int_S ie^{itz.\xi}(z.\xi)dz}{\int_S e^{itz.\xi}\ dz},$$
$$T_1(t,\xi) = -\frac{\int_S e^{itz.\xi}(z.\xi)^2 dz}{\int_S e^{itz.\xi}\ dz},$$
$$T_2 = \frac{2}{t}\frac{D'_t}{D} \quad \text{avec } D = \int_S e^{itz.\xi} dz$$

d) $T_2(t,\xi)$ est singulier car $D(t,|\xi|)$ admet une infinité de zéros relativement à $|\xi|$.
Cependant on peut donner un sens à l'opérateur singulier correspondant $T_2(t,D_x)$ comme on l'a fait au paragraphe 2.6 dans le cas $n = 5$.
Nous examinerons ces généralisations dans un travail ultérieur.
e) Le théorème 2.6 se généralise en prenant des conditions initiales complètes sous la forme :
$$\begin{cases} Ly &= \Box y - Ny = f(Dy) \\ y_{/t=0} &= y_0,\ y_{t/t=0} = y_1 \end{cases}$$

On obtient un résultat d'unicité et d'existance globale régulière analogue au théorème 2.6 en suivant la procédure usuelle suivante :

* On résoud d'abord le théorème 2.3 pour l'équation linéaire non homogène suivante

$$\left\{\begin{array}{ll} Ly & = \Box y - Ny = f(t,x) \\ y_{/t=0} & = y_0,\ y_{t/t=0} = y_1 \end{array}\right.$$

en disant que $y = y^1 + y^2 + y^3$ où y^1 est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} Ly & = 0 \\ y_{/t=0} & = 0, \quad y_{t/t=0} = y_1 \end{array}\right.$$

y^3 est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} Ly & = f \\ y_{/t=0} & = 0, \quad y_{t/t=0} = 0 \end{array}\right.$$

déjà calculée par le principe de Duhamel, y^2 est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} Ly & = 0 \\ y_{/t=0} & = y_0, \quad y_{t/t=0} = 0 \end{array}\right.$$

obtenue par changement de fonction inconnue en posant $y = y_0 + z$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{ll} Lz & = -Ly_0 = \Delta y_0 + Ny_0 \\ z_{/t=0} & = y_0, \quad z_{t/t=0} = y_{0/t=0} = 0 \end{array}\right.$$

d'où $z = \int_0^t \frac{t-r}{w_n} \int_{S^{n-1}} (\Delta y_0 + Ny_0)\ (r, x + (t-r)z)\ dz$ par le principe de Duhamel et la valeur de y^2 .

** Ensuite on résoud le problème de Cauchy local en temps semi-linéaire et le problème de Cauchy global en temps semi-linéaire comme dans les paragraphes 2.8 et 2.9 .

Appendice

Lemme 2.8 *Les seules solutions complexes de l'équation*

$$\lambda \cos \lambda - \sin \lambda = 0$$

sont réelles et forment une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *ayant les propriétés suivantes :*

$* \; \lambda_{-k} = -\lambda_k \; \forall \; k \in \mathbb{N} \; et \; \lambda_0 = 0$
$* * \lambda_k \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\; (\forall \; k \in \mathbb{Z}) \; et \; \lim_{k\to+\infty}(\lambda_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$

Preuve. On a $z = x + iy = Re\ z + iIm\ z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin iy = ishy \quad ; \quad \cos iy = chy$$

Les formules :
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$ch(a + b) = cha\ chb + sha\ shb$
$sh(a + b) = sha\ chb + sha\ chb$
sont aussi valables pour a et b complexes .
D'où :
$\sin z - z \cos z = \sin(x + iy) - (x + iy)cos(x + iy)$

$$= (\sin xchy + ishy) - (x + iy)(\cos xchy - ishy \sin x)$$

et l'équation s'écrit :

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \sin xchy - x \cos xchy - yshy \sin x = 0 & (E_1) \\ shy \cos x - y \cos xchy + xshy \sin x = 0 & (E_2) \end{cases}$$

*) On constate que $y = 0$ et $\sin x - x\cos x = 0$ est une première solution de (E).

*) Cherchons s'il y a d'autre pour $x = 0$:
On a $shy - ychy = 0 \Leftrightarrow y = thy$

*) Les autres solutions vérifiants donc à la fois $y \neq$ et $x \neq 0$.

*) On constate aussi que si (x_0, y_0) est solution de (E) alors $(-x_0, y_0), (x_0, -y_0), (-x_0, -y_0)$ sont trois autres solutions.

*) Cherchons donc les solutions (x, y) de (E) telque $x > 0$ et $y > 0$
Dans ces conditions divisons (E_1) *par* $\sin xchy$ et (E_2) *par* sh y $\cos x$, on a :

$(E_1^{'})$ $1 - \frac{x}{tgx} - ythy = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{tgx} = 1 - ythy$

$(E_2^{'})$ $1 + xtgx - \frac{y}{thy} = 0 \Longleftrightarrow xtgx = \frac{y}{thy} - 1$
En multipliant membre à membre ($E_1^{'}$) *et* $(E_2^{'})$ *ona* :
(1) $x^2 = -y^2 + y(\frac{1}{thy} + thy) - 1$
D'autre part on a :

$$tgz = \frac{\sin xchy + ishy\cos x}{\cos xchy - i\sin xshy}$$

$$= \frac{(\sin xchy + ishy\cos x)(\cos xchy + ishy)}{\cos^2 xch^2y + \sin^2 xsh^2y}$$

$$= \frac{\cos x\sin x + ishychx}{\cos^2 xch^2y + (1 - \cos^2 x)sh^2y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}ish2y}{\cos^2 x(ch^2y - sh^2y) + sh^2y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x + ish2y)}{\cos^2 x + sh^2y} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x + ish2y)}{\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{ch2y-1}{2}}$$

Alors

$$tgz = \frac{\sin 2x + ish2y}{\cos 2x + 2y} \;\; ; \quad z = x + iy$$

Puisque $z = tgz$ d'aprés (E) on obtient :

$$x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + ch2y} = \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x - 1 + 2sh^2y + 1} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + sh^2 y}$$

$x = \frac{tgx}{1+\frac{sh^2y}{\cos^2 x}}$ en divisant N et D par $\cos^2 x$.
D'oú $\frac{tgx}{x} = 1 + \frac{sh^2y}{\cos^2 x} = 1 - ythy$ (cf (E_1')).
$\cos^2 x = \frac{1-ythy}{ythy}sh^2y = -sh^2y + \frac{shychy}{y}$
On obtient alors l'équation :
(2) $\cos^2 x = \frac{sh2y}{2y} - sh^2y$
Or on a
(1) $x^2 = -y^2 + y(\frac{1}{thy} + thy) - 1$
qui impliquent l'équation en y

$$(3) \quad (\cos\sqrt{-y^2 + y(\frac{1}{thy} + thy) - 1})^2 = \frac{sh2y}{2y} - sh^2y.$$

On pose
$g_1(y) = (\cos\sqrt{\alpha})^2$ avec
$\alpha = -y^2 + y(\frac{1}{thy} + thy) - 1$
$g_2(y) = \frac{sh2y}{2y} - sh^2y$
Et (3) s'écrit :
$(3)'$ $g_1(y) = g_2(y)$

$$\alpha' = -2y + (\tfrac{1}{thy} + thy) + y(\tfrac{1}{ch^2y} - \tfrac{1}{ch^2yth^2y})$$

$$\alpha' = y(-2 - \tfrac{4}{sh^2 2y}) + \tfrac{1}{thy} + thy$$

$$\alpha' = \tfrac{(sh^2 2y - 4)y + 4shych^3y + 4sh^3ychy}{sh^2 2y}$$

$$\alpha' = \tfrac{(-ch4y - 3)y + (2shychy)(2ch2y)}{sh^2 2y}$$

$\alpha^{'} = \frac{(-ch4y-3)y+sh4y}{sh^2 2y} = \frac{N_1}{D_1}$

Or

$N_1^{'} = -3 - ch4y + 4ch4y + y[-4sh4y]$

$N_1^{'} = 3(ch4y-1) - 4y(sh4y)$

$N_1^{'} > 0 \Longleftrightarrow k(y) = \frac{3}{4}\frac{ch4y-1}{sh4y} > y$

$k^{'}(y) = 3\frac{ch4y-1}{sh^2 4y}$

$k^{'}(0) = \lim_{y\longrightarrow 0} 3\frac{\frac{(4y)^2}{2}}{(4y)^2} = \frac{3}{2}$

$k(0) = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\frac{(4y)^2}{2}}{4y} = 0$

$k(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}\frac{ch3-1}{sh3} = \frac{3}{4}\frac{9{,}067}{10{,}017} = \frac{27{,}201}{40{,}068} = 0,678$

$k(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}\frac{ch1-1}{sh3} = \frac{3}{4}\frac{0{,}543}{1{,}175} = 0,346 > \frac{1}{4} = 0,28$

$k(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}\frac{ch2-1}{sh2} = \frac{3}{4}\frac{2{,}762}{3{,}626} = 0,571 > \frac{1}{2} = 0,5$

$k^{''}(y) = 3(\frac{ch4-1}{sh^2 4y})^{'} = 3[\frac{4sh4y.sh^2 4y-8sh4y.ch4y(ch4y-1)}{sh^4 4y}]$

$= 12[\frac{sh^2 4y-2ch^2 4y+2ch4y}{sh^3 4y}] = 12[\frac{2ch4y-1-ch^2 4y}{sh^3 4y}] = -12\frac{(1-chy)^2}{sh^3 4y} < 0$ si $y \neq 0$

Car $\lim_{y\longrightarrow 0} \alpha = 0$ puisque si $ychy = shy$ (ie. $y = 0$ et $y = thy$) alors $\alpha = 0$ et si $yshy - chy = 0$ (ie. $y = cothy$) alors $\alpha = 0$

$g_1^{'}(y) = -2(\cos\sqrt{\alpha})(\sin\sqrt{\alpha})\frac{\alpha^{'}}{2\sqrt{\alpha}}$

$\alpha(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{ch0.5}{sh0.5} + \frac{sh0.5}{ch0.5}) - 1 = 0,062$

$alors\ g_1(\frac{1}{2}) = (\cos(0,248))^2 = 0,9999$

$d'autre\ part\ on\ a\ g_2(y) = \frac{sh2y}{2y} - sh^2 y = \frac{2ysh2y-2ysh^2 y}{2y} = \frac{shy(chy-yshy)}{y}$

$g_2^{'}(y) = \frac{ch2y-sh2y-2y^2 sh2y}{2y^2} = \frac{N_2}{D_2}$

$$g_2^{'}(y) < 0 \Longleftrightarrow (th2y)(-1-2y^2) + 2y < 0$$

$$g_2^{'}(y) < 0 \Longleftrightarrow th2y > \frac{2y}{2y^2+1} = f(y)$$

$$f'(y) = \frac{2(2y^2+1)-8y^2}{(2y^2+1)^2} = 2\frac{(2y^2+1)-4y^2}{(2y^2+1)^2} = \frac{2}{(2y^2+1)^2}(1-2y^2)$$

Donc $\quad g_2'(y) < 0 \ \ \forall\ y \in [0, y_0 \simeq 1,2]$

$$\alpha'(y) \sim_{y\longrightarrow 0} \frac{(-1-\frac{(4y)^2}{2}-3)y+4y+\frac{(4y)^3}{6}}{(2y+\frac{(2y)^3}{6})^2} \sim \frac{2}{3}y \longrightarrow_{y\longrightarrow 0} 0$$

$$g_2(y_1 \simeq \frac{1}{2}) = sh1 - \frac{ch1}{2} + \frac{1}{2} = 0,904$$

$$g_2'(y) \sim_{y\longrightarrow 0} \frac{-2y^2(2y+\frac{8y^3}{6})+2y(1+\frac{4y^2}{2})-2y-\frac{8y^3}{6}}{2y^2} \sim -\frac{2}{3}y \longrightarrow_{y\longrightarrow 0} 0$$

on a $\ g_1(0,25) = 0,999\ $ et $\ g_2(0,25) = 0,979$

Alors , si $\ 0 < y < y_0 \sim 1,2$ on a $\ g_1(y) > g_2(y)$

Conclusion :
L'équation $\sin z - z\cos z = 0$ avec $z = x + iy = Rez + iImz$, ne possède que les solutions z tels que $(x = tgx, y = 0)$, c'est à dire uniquement des solutions rèelles $z = x = Rez$ avec $x = tgx$.

Bibliographie

[1] A.R. Adams, *Sobolev Spaces* . Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Vol **65** , (1975).

[2] M.Berger - D.Gauduchon - E.Mazet, *Le spectre d'une Variété Riemanienne.* **194** Springer - Lecture Notes in Mathematics.

[3] G.Beylkin, *The fundamental identity for iterated spherical means and the inversion formula for diffraction tomography and inverse scattering.* Journal of Mathematical Physics n°24 6pp (1983),1399-1400.

[4] L.R.Bragg, *The radial wave and Euler-Poisson-Darboux equations with singular data.* SIAM J.MATH.ANAL, Vol 12, n°4, July 1981.

[5] P.Brenner et W.Von Wahl, *Global Classical solutions of non linear wave equations.* Math .Z. 176, (1981), 87-121.

[6] H.Brézis, *Analyse Fonctionnelle.*Masson, 1981

[7] M.Cicognani, L.Zanghirati, *The Cauchy problem for Non linear hyperbolic Equations with Levi condition.* Universita degli Studi di Mathematica preprint n°260 et publication correspondante au Bull Sci Maths.

[8] W. Craig, *Nonstrictly Hyperbolic Nonlinear Systems.* Math. Ann. 277(1989), 213-232.

[9] P. D'Ancona , *On a semilinear weakly hyperbolic equation with logarithmic nonlinearity* . Differential and Integral Equations, V.7, n°1 ,January (1994) ,121-132.

[10] P.D'Ancona , *A note on a theorem of Jorgens.* Math.Z, 218, (1995), 239- 252.

[11] P.D'Ancona, A. Di Giuseppe, *Global existence with large data for nonlinear weakly hyperbolic equation.* Math Nachr, 231, (2001), 5-21.

[12] S.Delache - J.Leray, *Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de Triciomi-Clairaut, hyperbolique d'ordre 2.* Bulletin de la S.M.F, tome 99 (1971), p 113-336.

[13] J.Dieudonné, *Calcul Infinitésimal* . (collection Methodes), p 136, Herman, Paris (1980).

[14] J.Ginibre et G.Velo, *Inégalités de Strichartz généralisées de l'équation des ondes* . Séminaire sur les Eq. aux Dér. part, (1995), Exp n°17, 1994 - 95. Ecole Polytecnique Palaiseau.

[15] D.Gourdin - M.Ghedamsi - H.Kamoun, *Global regular solutions of some nonlinear equations with weak schődinger type or weakly hyperbolic type.* Partial Differential Equations and Mathematical Physics - International conference in the honour of Professor Jean Vaillant, 3-7 juin 2002.

[16] D.Gourdin , *Une classe d'opérateur faiblement hyperboliques non linéaires* . Bull Sc Math 113, (1989), 25-50.

[17] D.Gourdin, *Systèmes faiblement hyperboliques non linéaires.* Osaka Journal of Maths, (1991)

[18] D.Gourdin - E.Munoz, *Systèmes faiblement hyperboliques semi-linéaires d'ordre un et de taille* 4×4. Bull Soc Royale des Sciences de Liège, (1995).

[19] D.Gourdin - E.Munoz, *Systèmes faiblement hyperboliques semi-linéaires d'ordre un et de taille* $n \times n$ *de rang caractéristique maximum.* Bull Soc Royale des Sciences de Liège, (1995).

[20] D.Gourdin, *Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* ,(1974).

[21] P. Günther, *Ûber einige spezielle probleme aus der thEorie des linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (German)* Ber. Verh. Sächs. Akad, Wiss.leipzig. Math. Nat .Kl 102 (1957) n° 1 50 pp .

[22] C. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics Volume II* . Partial differential equations.Reprint of the 1962 original.

[23] N.Iwasaki , *The Cauchy problem for effectively Hyperbolic Equations* . Pub RIMS Kyoto University vol 20, N° 3 (1984) 543-584.

[24] F.John, *Plaine waves and spherical means applied to partial differential equation* . Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics , n°2.

[25] S.Pannizzi , *Global regular solutions of the wave equation with critical and non-coercive nonlinearity.* Math. Japonica, 49, n°1 (1999), 9-16.

[26] R.Racke, *Lectures on Non linear Evolution Equations.* Initial Value Problems. Aspects Of Mathematics. Ed Vierveg , (1929).

[27] J.Shatah - M.Struwe, *Geometric wave Equations.* Lecture Notes 2 - AMS - Courant Institute, (1998).

[28] R.Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations.* ,Vol 44 n°3 (1977). Duke Mathematical Journal, Sept 77, 705 - 714.

[29] Satyanad Kichenassamy, *Non linear wave equations.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 194 Marcel Dekker, Inc ; New York, (1996).

[30] W.A.Strauss, *Non linear wave equations.* Regional conference Series 73 AMS.

[31] Michael E.Taylor, *Partial differential equations III* . Non linear Equations. Applied Mathematical sciences , **117**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1996).

[32] Michael E.Taylor, *PDE Basic Theory T1*, Springer.

[33] J.Vaillant, *Théorie des distributions et applications aux Equations aux Dérivés partielles* . Cours de Maîtrise de Mathématiques de L'université de Paris 6.

[34] C. Zuily, *Solutions en grand temps d'équations d'ondes non linéaires* . Séminaire Bourbaki,46eme année ,no=779 , (1993-94) ,107-144.